Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

68. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 7. JANUAR 1958)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1958

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

68. Band **Inhalt** 4. Heft

Seite

Hellwig, G., Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. III 325

Ragab, F. M., Some Formulae for the Product of Bessel and Legendre Functions 338

Suschowk, D., Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung, Tschebyscheffsche Polynome und Legendresche Funktionen 2. Art . 340

Vidav, I., Über die Darstellung der positiven Funktionale 362

Puppe, D., Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I 367

Hellwig, G.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 325–337 (1958)

Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. III

Von

Günter Hellwig

Einleitung

Diese Arbeit bringt einige Bemerkungen zur Theorie der Systeme linearer und quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Variablen, die in Form oder Inhalt eine ähnliche Darstellung meines Wissens bisher in der Literatur nicht gefunden haben. Dagegen werden Existenzfragen für das Cauchy-Problem und die verschiedenen charakteristischen Probleme nicht behandelt, da darüber für unsere Zwecke völlig ausreichende Ergebnisse vorliegen bzw. nach bewährtem Muster leicht erbracht werden könnten. Für eine zusammenfassende Darstellung vgl. man etwa P. Lax [9].

Im § 1 wird die Überführbarkeit solcher Systeme auf eine Normalform im Courant-Friedrichsschen Sinne [3] für den quasilinearen Fall behandelt. Bei diesem ist die Herstellung einer Normalform nicht immer möglich, vielmehr werden dafür zusätzliche Bedingungen angegeben. Der § 2 bringt den Begriff des adjungierten Systems, wobei die Verwendung von Differentialformen besonders angemessen erscheint. Das Cauchysche Anfangswertproblem (A-Problem) und die charakteristischen Anfangswertprobleme (C-Probleme) werden in § 3 behandelt. Insbesondere interessiert dabei die Gesamtheit der C-Probleme. Es zeigt sich, daß für Systeme in der Normalform diese Gesamtheit eine wesentlich größere ist, als dies für die „vernünftigen" C-Probleme nicht in der Normalform vorliegender Systeme der Fall ist. Bei den A-Problemen werden Bedingungen für die Integration durch Quadraturen angegeben, die zu einer Verallgemeinerung des Begriffes der Laplaceschen Invarianten führen, sowie die Gültigkeit des Huyghensschen Prinzipes untersucht. Diese Dinge liegen natürlich bei zwei unabhängigen Variablen sehr einfach. Im § 4 werden Auflösungsformeln für die A-Probleme gebracht. Hier liegt eine Wiederaufnahme und Fortführung der Problemstellungen von Holmgreen und Rellich (für Systeme in [8], für Differentialgleichungen n-ter Ordnung in [7], [11]) vor. Die Ergebnisse werden aber für Systeme erweitert und wesentlich kürzer gewonnen. Auch wird eine echte Verallgemeinerung der Riemannschen Methode für allgemeine hyperbolische Systeme gegeben. Bei Holmgreen [7] gelingt die Auflösung eigentlich nur nach geeigneten Integralausdrücken.

Herrn W. HAACK habe ich für kritische Bemerkungen zu danken. Der Titel dieser Arbeit*) bringt zum Ausdruck, daß es sich um eine Fortsetzung der in [4] begonnenen Untersuchungen handelt.

§ 1. Normalform

Jedes quasilineare System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen Variablen x^k, $k=1, 2$ und n gesuchten Funktionen $u^j = u^j(x^1,x^2)$, $j=1, \ldots, n$ hat die Gestalt

$$L^i \equiv a_j^{ik} u^j_{|k} + f^i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Dabei soll — wie auch im folgenden — stets über oben und unten stehende gleiche *lateinische* Indizes summiert werden, eine Vereinbarung, die für *griechische* Indizes nicht gilt. Ferner sind alle auftretenden Größen reell. In (1.1) sind die Abkürzungen $u^j_{|k} \equiv \dfrac{\partial u^j}{\partial x^k}$ verwendet worden, wie auch ferner hinter dem Längsstrich stehende Indizes Ableitungen bedeuten sollen. Wir betrachten (1.1) in einem festen, abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{G}$ der x^1,x^2-Ebene. Man nennt (1.1): (a) ein *quasilineares* System, wenn a_j^{ik}, f^i Funktionen von x^k, u^j sind, (b) ein *fastlineares* System, wenn a_j^{ik} nur Funktionen von x^k und f^i Funktionen wie unter (a) sind, (c) ein *lineares* System, wenn $f^i = b_j^i u^j + c^i$ ist und a_j^{ik}, b_j^i, c^i Funktionen nur von x^k sind.

Es sei $u(x^1,x^2) \in \mathfrak{C}^1$ in $\mathfrak{G}$[1]) und α dort ein Vektorfeld mit den Komponenten $\alpha^k(x^1, x^2) \in \mathfrak{C}^0$, $k=1, 2$. Man nennt dann

$$u_{|\alpha} = \alpha^k u_{|k} \tag{1.2}$$

die Differentiation in Richtung des Feldvektors α. Man erkennt, daß (1.1) im allgemeinen n^2 solcher Richtungsdifferentiationen enthält. $u_{|\alpha}$, $u_{|\beta}$ heißen linear unabhängig, falls α, β linear unabhängig sind.

Sind $\lambda_i = \lambda_i(x^k, u^j)$ noch zu bestimmende geeignete Funktionen, so versucht man durch geeignete lineare Kombination von (1.1)

$$\lambda_i L^i \equiv \lambda_i a_j^{ik} u^j_{|k} + \lambda_i f^i = 0 \tag{1.3}$$

ein zu (1.1) äquivalentes Gleichungssystem zu finden, welches in jeder Gleichung nur *genau eine* Richtungsdifferentiation $u_{|\overset{\tau}{\alpha}}$, $\tau = 1, \ldots, n$ enthält mit Feldvektoren $\overset{\tau}{\alpha}$, die reell und in jedem Punkt paarweise linear unabhängig sind (R. COURANT und K. O. FRIEDRICHS [3], [6], I. G. PETROWSKI [10]). Zum Aufbau des äquivalenten Systems benötigt man offenbar n linear unabhängige

*) Sie bringt einige Teile aus [6] in verbesserter Form zum Abdruck. Wenn auch die Untersuchungen [6] zeitlich sehr zurückliegen, so wurde die hier getroffene Auswahl durch Vergleich mit der Literatur über diesen Gegenstand dadurch erleichtert. Die Auswahl geht zurück auf Gespräche mit den Herren W. HAACK und P. LAX.

[1]) Wir schreiben: $u \in \mathfrak{C}^n$ falls in dem zugrunde gelegten Gebiet u stetige n-te Ableitungen besitzt. Die Stetigkeit von u wird durch $\mathfrak{C}^0$ beschrieben.

n-Vektoren λ^τ mit den Komponenten λ_i^τ. Denken wir uns diese in (1.3) eingesetzt, so soll das so entstehende System die Gestalt

$$\tilde{L}^\tau \equiv g_j^\tau u^j_{|\overset{\tau}{\alpha}} + \lambda_j^\tau f^j = 0, \qquad \tau = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

haben. Gleichsetzung von (1.3), (1.4) liefert

$$\lambda_i^\tau a_j^{i1} = g_j^\tau \overset{\tau}{\alpha}{}^1, \qquad \lambda_i^\tau a_j^{i2} = g_j^\tau \overset{\tau}{\alpha}{}^2. \tag{1.4a}$$

Nehmen wir $\overset{\tau}{\alpha}{}^1 \neq 0$ an, was gegebenenfalls durch Drehung des Koordinatensystems und Gebietseinschränkung von $\mathfrak{G}$ erreicht werden kann, so folgt mit $\varphi^\tau = \frac{\overset{\tau}{\alpha}{}^2}{\overset{\tau}{\alpha}{}^1}$ aus (1.4a)

$$\lambda_i^\tau (a_j^{i1} \varphi^\tau - a_j^{i2}) = 0. \tag{1.4b}$$

Fordern wir, daß die algebraische Gleichung

$$|a_j^{i1} \varphi - a_j^{i2}| = 0 \tag{1.4c}$$

in $\mathfrak{G}$ n verschiedene reelle Wurzeln φ^τ besitzt, so sind uns dadurch n Feldvektoren $\overset{\tau}{\alpha}$ gegeben. Systeme (1.1), die die Forderung (1.4c) erfüllen, nennen wir Systeme von *total hyperbolischem Typus* [3]. Nur mit solchen werden wir uns hier beschäftigen. Sie können in der Gestalt (1.4) angenommen werden, die wir die *invariante Form* von (1.1) nennen. Dabei sind g_j^τ, λ_j^τ Funktionen von x^k, u^j. Die Koeffizienten in (1.4) haben dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften in $\mathfrak{G}$ wie die in (1.1). Überdies ist $|g_j^\tau| \neq 0$, was aus den Forderungen an die Feldvektoren $\overset{\tau}{\alpha}$ folgt. Für die quasilinearen Systeme hat man sich für die obigen Überlegungen stets ein festes Lösungssystem u^j eingesetzt zu denken.

Unter den charakteristischen Kurvenscharen für (1.1) verstehen wir die Lösungen von

$$\dot{x}^1 = \overset{\tau}{\alpha}{}^1, \qquad \dot{x}^2 = \overset{\tau}{\alpha}{}^2, \qquad \tau = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Dabei sei $\overset{\tau}{\alpha}{}^k \in \mathfrak{C}^1$, wozu $a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1$ in $\mathfrak{G}$ hinreichend ist. Dann bilden sie in $\mathfrak{G}$ im Sinne von Blaschke-Bol [1] ein *n-Gewebe*. Überdies darf $(\overset{\tau}{\alpha}{}^1)^2 + (\overset{\tau}{\alpha}{}^2)^2 = 1$ angenommen werden, womit der Parameter in (1.5) als Bogenlänge $\overset{s}{\tau}$ festgelegt wird.

Zu einem Paar der Vektoren $\overset{\varrho}{\alpha}$, $\overset{\sigma}{\alpha}$ gibt es ein Paar *kontragredienter Vektoren* $\underset{\varrho}{\alpha}$, $\underset{\sigma}{\alpha}$, deren Komponenten durch

$$\begin{cases} \overset{\varrho}{\alpha}{}^k \underset{\varrho}{\alpha}_k = 1, & \overset{\varrho}{\alpha}{}^k \underset{\sigma}{\alpha}_k = 0, \\ \overset{\sigma}{\alpha}{}^k \underset{\sigma}{\alpha}_k = 1, & \overset{\sigma}{\alpha}{}^k \underset{\varrho}{\alpha}_k = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

definiert sind. Sie bauen die *Linearformen*

$$\underset{\varrho}{\omega} = \underset{\varrho}{\alpha}_k \, dx^k, \qquad \underset{\sigma}{\omega} = \underset{\sigma}{\alpha}_k \, dx^k \text{ [2]} \tag{1.7}$$

[2]) Genauer müßten wir für $\underset{\varrho}{\omega}$ etwa $\overset{\varrho,\sigma}{\underset{\varrho}{\omega}}$ schreiben, um anzudeuten, daß zum Aufbau die Vektoren $\overset{\varrho}{\alpha}$, $\overset{\sigma}{\alpha}$ benutzt worden sind. Wir sehen davon ab.

auf. Insbesondere ist dann auf der *ϱ-ten charakteristischen Kurvenschar* $\int_{\varrho} \omega = s_{\varrho}$, d.h. die Bogenlänge und $\omega_{\varrho} = 0$. Entsprechendes gilt auf der *σ-ten charakteristischen Kurvenschar*: $\int_{\sigma} \omega = s_{\sigma}$, $\omega_{\varrho} = 0$.

Im *fastlinearen Fall* kann die *invariante Form* (1.4) des Systems (1.1) bekanntlich vereinfacht werden. Führt man durch

$$U^{\tau} = g_j^{\tau} w^j \quad \text{mit} \quad w^j = h_e^j U^e \quad \text{und} \quad g_j^{\tau} h_e^j = \delta_e^{\tau} \tag{1.8}$$

neue gesuchte Funktionen ein, so erscheint wegen

$$g_j^{\tau} w^j_{|\frac{\tau}{\alpha}} = U^{\tau}_{|\frac{\tau}{\alpha}} - g^{\tau}_{j|\frac{\tau}{\alpha}} w^j \tag{1.9}$$

(1.4) in der Gestalt

$$U^{\tau}_{|\frac{\tau}{\alpha}} + F^{\tau} = 0, \qquad \tau = 1, \ldots, n \tag{1.10}$$

mit

$$F^{\tau}(x^k, U^j) = \lambda_j^{\tau} f^j - g^{\tau}_{j|\frac{\tau}{\alpha}} h_e^j U^e. \tag{1.11}$$

Man nennt bekanntlich (1.10) die *Normalform* von (1.1). Dabei ist $F^{\tau} \in \mathfrak{C}^0$ für jedes Argument, falls $a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1$ und $f^i \in \mathfrak{C}^0$ sind für $x^k \in \mathfrak{G}$ und $-\infty < w^j < \infty$.

Die Normalform ist von *ausgezeichneter* Bedeutung, da sie 1. sofort den Übergang zu Volterraschen Integralgleichungen ermöglicht und 2. für die numerische Berechnung der Lösung bei den verschiedenen Anfangs- und Randwertbedingungen ein angepaßtes Differenzenverfahren anbietet.

Im *quasilinearen Fall* kann die Form (1.10) nur unter zusätzlichen Voraussetzungen gewonnen werden, da die Umformung (1.9) nicht gültig bleibt. An Stelle von (1.8) führen wir durch

$$U^{\tau} = \Phi^{\tau}(x^k, u^j) \tag{1.12}$$

neue gesuchte Funktionen U^{τ} ein. Multiplizieren wir (1.4) mit nichtverschwindenden Faktoren $M^{\tau} = M^{\tau}(x^k, u^j)$, so erhalten wir

$$M^{\tau} \tilde{L}^{\tau} \equiv M^{\tau} g_j^{\tau} u^j_{|\frac{\tau}{\alpha}} + M^{\tau} \lambda_j^{\tau} f^j = 0. \tag{1.13}$$

Aus der Forderung, daß (1.13) die Gestalt (1.10) hat, folgt mit (1.12) unter Beachtung von (1.2)

$$M^{\tau} \tilde{L}^{\tau} = \sum_{j=1}^{n} \Phi^{\tau}_{|u^j} u^j_{|\frac{\tau}{\alpha}} + \Phi^{\tau}_{|k} \overset{\tau}{\alpha}{}^k + F^{\tau}, \tag{1.14}$$

wobei die beiden letzten Terme zu einem $\tilde{F}^{\tau}$ zusammengefaßt werden können. Ein Vergleich mit (1.13) zeigt, daß dann $M^{\tau} g_j^{\tau} = \Phi^{\tau}_{|u^j}$ sein muß. Dies bedeutet, daß die Formen $\Theta^{\tau} = g_j^{\tau} du^j$ durch Multiplikatoren M^{τ} im Raume der u^j integrabel gemacht werden können. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$[d, M^{\tau} \Theta^{\tau}] = 0, \qquad \tau = 1, \ldots, n \tag{1.15}$$

gilt. $[d, M^\tau \Theta^\tau]$ bedeutet die *äußere Ableitung* der Form $M^\tau \Theta^\tau$. In der Schreibweise folgen wir W. HAACK [5]. Für $n = 2$ gibt es stets solche Multiplikatoren (vgl. die Bemerkung von J. NITSCHE in [4], S. 350), für $n \geqq 3$ ist dies im allgemeinen nicht richtig. Nach einem Satz von E. CARTAN [2], S. 48, besteht eine Relation der Form (1.15) genau dann, wenn es Formen Ω^τ derart gibt, daß

$$[d, \Theta^\tau] = [\Omega^\tau, \Theta^\tau] \tag{1.16}$$

gilt. Äquivalent mit (1.16) ist das Verschwinden der äußeren Produkte

$$[\Theta^\tau, [d, \Theta^\tau]] = 0 \tag{1.16a}$$

im Raume der u^j. Erfüllen die g_j^τ diese Gleichungen, so gibt es auch im *quasilinearen Falle* eine Normalform. Es ist leicht, solche Sonderfälle aufzuzählen. Sind etwa g_j^τ in (1.4) nur Funktionen von x^1, x^2 und der *einen* Variablen $u^j (g_1^\tau = g_1^\tau (x^1, x^2, u^1)$ usw.), dann ist $[d, \Theta^\tau] = 0$ und (1.16a) erfüllbar. Man erreicht (1.10) indem man für (1.12)

$$U^\tau = \int g_j^\tau \, d u^j \tag{1.17}$$

setzt.

§ 2. Das adjungierte System

Wir betrachten das lineare System (1.1) in $\mathfrak{G}$ und setzen $a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1$, b_j^i, $c^i \in \mathfrak{C}^0$ voraus. Dann sind $\overset{\tau}{\alpha}{}^k$ (1.5) aus $\mathfrak{C}^1$ und das *charakteristische n-Gewebe* existiert in $\mathfrak{G}$. (1.10) hat die Gestalt

$$U^\tau_{|\overset{\tau}{\alpha}} = A_j^\tau U^j + C^\tau; \quad A_j^\tau, C^\tau \in \mathfrak{C}^0. \tag{2.1}$$

Wir definieren das zu (2.1) *adjungierte System*.

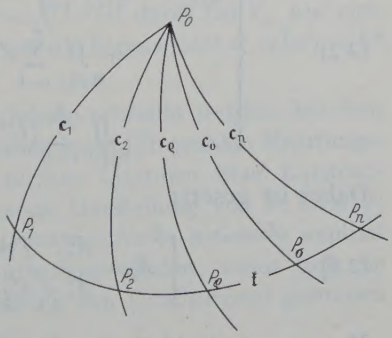

Fig. 1

Zu diesem Zweck legen wir durch einen beliebigen inneren Punkt P_0: $\overset{\circ}{x}{}^k \in \mathfrak{G}$ die n charakteristischen Kurven (1.5) hindurch und betrachten sie ferner etwa für $x^2 \leqq \overset{\circ}{x}{}^2$. Dabei ist vorausgesetzt, daß $x^2 = \overset{\circ}{x}{}^2$ keine charakteristische Kurve ist, was gegebenenfalls durch eine Koordinatentransformation erreichbar ist. Schließlich bringen wir diese mit einer glatten Kurve $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{G}$ zum Schnitt, die nirgends eine charakteristische Richtung (1.5) hat. Qualitativ ergibt sich Fig. 1. Wir nennen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_n$ die *Außen-*, $\mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}$ die *Innencharakteristiken*[3]) und bezeichnen das durch $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{k}$ abgeschlossene Gebiet mit $\mathfrak{A}(P_0)$ und die Berandung mit $\dot{\mathfrak{A}}(P_0)$. In diesem Sinne denken wir uns auch die $\overset{\tau}{\alpha}$ numeriert.

[3]) Wir verzichten auf eine genaue Definition dieser wohlbekannten Begriffe.

Aus $\mathfrak{c}_\tau$, $\tau = 1, \ldots, n$ werden zwei Charakteristiken $\mathfrak{c}_\varrho$, $\mathfrak{c}_\sigma$ $(\varrho < \sigma)$ mit dazugehörigen $\overset{\varrho}{\alpha}$, $\overset{\sigma}{\alpha}$ (1.5) und ω_ϱ, ω_σ (1.7) *beliebig* ausgewählt[3a]). Wegen der Abhängigkeit der Vektoren $\overset{\tau}{\alpha}$ von $\overset{\varrho}{\alpha}$, $\overset{\sigma}{\alpha}$ gilt

$$U^\tau_{|\overset{\tau}{\alpha}} = s^\tau U^\tau_{|\overset{\varrho}{\alpha}} + t^\tau U^\tau_{|\overset{\sigma}{\alpha}} \tag{2.2}$$

mit $s^\varrho = t^\sigma = 1$, $s^\sigma = t^\varrho = 0$. Ferner ist

$$[d, \omega_\varrho] = q[\omega_\sigma, \omega_\varrho], \quad [d, \omega_\sigma] = \bar{q}[\omega_\varrho, \omega_\sigma], \tag{2.3}$$

$$q = \frac{1}{D}\left(\alpha_{\varrho 1|2} - \alpha_{\varrho 2|1}\right), \quad \bar{q} = \frac{1}{D}\left(\alpha_{\sigma 2|1} - \alpha_{\sigma 1|2}\right), \quad D = \alpha_{\varrho 1}\alpha_{\sigma 2} - \alpha_{\varrho 2}\alpha_{\sigma 1}. \tag{2.4}$$

Wenden wir auf die Form

$$\omega = \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau U^\tau \left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) \tag{2.5}$$

den Cartanschen Integralsatz

$$\int\limits_{\dot{\mathfrak{A}}(P_0)} \omega = \iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} [d, \omega] \tag{2.6}$$

an und setzen $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ als Lösungen von (2.1) voraus, so folgt bei Beachtung von (2.2), (2.3)

$$\left\{\begin{aligned} \int\limits_{\dot{\mathfrak{A}}(P_0)} \omega &= \iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} \left\{(Z_\tau U^\tau s^\tau)_{|\overset{\varrho}{\alpha}} + (Z_\tau U^\tau t^\tau)_{|\overset{\sigma}{\alpha}}\right\} [\omega_\varrho, \omega_\sigma] \\ &\quad + \iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau U^\tau (s^\tau \bar{q} + t^\tau q)\, [\omega_\varrho, \omega_\sigma] \\ &= \iint\limits_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} \{U^\tau (Z_{\tau|\overset{\tau}{\alpha}} + \bar{A}^i_\tau Z_i) + Z_\tau C^\tau\} [\omega_\varrho, \omega_\sigma]. \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Dabei ist gesetzt

$$\left\{\begin{aligned} \bar{A}^i_\tau &= A^i_\tau, \quad i \neq \tau \\ &= A^\tau_\tau + s^\tau_{|\overset{\varrho}{\alpha}} + t^\tau_{|\overset{\sigma}{\alpha}} + s^\tau \bar{q} + t^\tau q, \quad i = \tau. \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

Man nennt (2.9b) das zu (2.9a) *adjungierte* System [4]:

$$U^\tau_{|\overset{\tau}{\alpha}} = A^\tau_i U^i, \tag{2.9a}$$

$$Z_{\tau|\overset{\tau}{\alpha}} = -\bar{A}^i_\tau Z_i. \tag{2.9b}$$

Dabei ist bemerkenswert, daß 1. keine Charakteristik ausgezeichnet worden ist und 2. das adjungierte System von (2.9b) wieder das Ausgangssystem (2.9a) ist. Ferner bestätigt man leicht die wichtige Relation

$$s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{c}_\tau. \tag{2.10}$$

[3a]) Sie müssen nicht benachbart sein, wie in Fig. 1.

§ 3. Anfangswertprobleme

1. Das Cauchysche Anfangswertproblem (A-Problem). Bei diesem ist neben (2.1) eine glatte Kurve $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{G}$ mit nirgends charakteristischer Richtung (1.5) gegeben (Fig. 1). Wir dürfen $\mathfrak{k}$ bis zu dem Rand von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt und in ein nicht charakteristisches Feld β eingebettet denken, welches durch

$$\dot{x}^1 = \beta^1, \quad \dot{x}^2 = \beta^2, \quad \beta^i \in \mathfrak{C}^1 \tag{3.1}$$

gegeben wird. Dann bildet $\overset{\tau}{\alpha}, \beta$ ein $(n+1)$-Gewebe in $\mathfrak{G}$. Für die Koeffizienten in (2.1) betrachten wir zwei Voraussetzungsgruppen:

$$V_{N_1}: A_j^\tau, C^\tau \in \mathfrak{C}^0,$$

$$V_{N_2}: A_j^\tau, C^\tau, A_{j|\beta}^\tau, C_{|\beta}^\tau \in \mathfrak{C}^0.$$

Es gilt dann der

Satz. (a) *Sind $U^\tau = \Psi^\tau \in \mathfrak{C}^0$ auf $\mathfrak{k}$ willkürlich vorgegebene Funktionen, dann gibt es unter V_{N_1} für alle $P_0 \in \mathfrak{G}$ für die $\mathfrak{A}(P_0) \subset \mathfrak{G}$ (Fig. 1) genau ein Lösungssystem $U^\tau(P_0)$ von (2.1) mit U^τ, $U_{|\overset{\tau}{\alpha}}^\tau \in \mathfrak{C}^0$, welches auf $\mathfrak{k}$ die Vorgaben Ψ^τ erfüllt.*

(b) *Sind $\Psi^\tau \in \mathfrak{C}^1$, dann hat unter V_{N_2} dieses Lösungssystem die Eigenschaft, daß auch $U_{|\beta}^\tau \in \mathfrak{C}^0$ gilt, welches mit* (a) *schließlich $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ ergibt.*

Bemerkung. Damit ist auch ein Existenzsatz für das Ausgangssystem (1.1) durch die Formel (1.8) gegeben. Die Vorgaben $u^\tau = \psi^\tau$ auf $\mathfrak{k}$ führen mit $\Psi^\tau = g_j^\tau \psi^j$ auf ein A-Problem vom obigen Typus. Die Voraussetzungen V_{N_1}, V_{N_2} ergeben sich aus solchen für (1.1):

$$V_{A_1}: \quad a_j^{ik} \in \mathfrak{C}^1, \quad b_j^i, c^i \in \mathfrak{C}^0$$

und entsprechendes für V_{A_2}. Die Lösung $u^\tau = h_j^\tau U^j$ ist dabei bei V_{A_1} nur eine verallgemeinerte Lösung, da sie nach Satz (a) nur die Eigenschaft $u^\tau, (g_j^\tau w^j)_{|\overset{\tau}{\alpha}} \in \mathfrak{C}^0$ besitzt.

Der Beweis kann durch ein Iterationsverfahren erbracht werden, bei dem es nicht nötig ist, die Technik der im allgemeinen nicht integrablen Richtungsableitungen zu verlassen [6]. Aus der reichlichen Literatur über Existenzfragen erwähnen wir nur die zusammenfassende Darstellung von P. Lax [9] und I. G. Petrowski [10], S. 77. Ist das *charakteristische n-Gewebe* explizit bekannt, so kann überdies die Frage beantwortet werden, wann sich die Lösung des A-Problems allein durch Verwendung von Quadraturen gewinnen läßt. Ist $((A_j^\tau))$ in (2.1) eine Dreiecksmatrix:

$$A_j^\tau = 0 \quad \text{für} \quad \tau < j, \tag{3.2}$$

so lautet die erste Gleichung in (2.1)

$$U_{|\overset{1}{\alpha}}^1 = A_1^1 U^1 + C^1. \tag{3.3}$$

Dies ist für die 1. Gewebeschar der charakteristischen Kurven eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit der Variablen $\overset{1}{s}$. Ihre eindeutige Lösung im beliebigen Punkt P_0 kann durch Quadraturen gefunden werden, da die Anfangswerte $U^1 = \Psi^1$ auf $\mathfrak{k}$ gegeben sind. Die zweite Gl. (2.1) erscheint dann

in der Gestalt

$$U^2_{|\alpha^2} = A_2^2 U^2 + \tilde{C}^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{C}^2 = A_1^2 U^1 + C^2 \tag{3.4}$$

und das Verfahren setzt sich analog fort. Für $n=2$ sind durch (3.2) die verallgemeinerten *Laplaceschen Invarianten* gegeben (vgl. [4], S. 250). Aus (2.8) ist ersichtlich, daß $A_j^\tau = 0$, $\bar{A}_j^\tau = 0$ für $\tau < j$ äquivalente Aussagen sind, so daß beide Systeme (2.9) bezüglich der Integration durch Quadraturen dieselben Eigenschaften haben. Ist überdies $((A_j^\tau))$ eine Diagonalmatrix

$$A_j^\tau = 0, \quad \tau \neq j, \tag{3.5}$$

so ist die τ-te Gleichung, $\tau = 1, \ldots, n$ in (2.1) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der Variablen $\underset{\tau}{s}$ längs $\mathfrak{c}_\tau$ (Fig. 1). Die Lösungen $U^\tau(P_0)$ hängen daher nur von den Anfangswerten Ψ^τ auf $\mathfrak{k}$ im Punkte P_τ (Fig. 1) ab. (3.5) bedeutet die Gültigkeit des *Huyghensschen Prinzipes*, sowohl für das A-Problem zu (2.1) wie zu (1.1). Für $n=2$ hängen u^1, u^2 in P_0 nur von den Anfangswerten im Durchschnitt $(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2) \cdot \mathfrak{k}$ ab.

2. Das charakteristische Anfangswertproblem (C-Problem). Durch Vorgaben allein auf den *Charakteristiken* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n$ (Fig. 1) soll uns in einem geeigneten Gebiet aus $\mathfrak{G}$ eine eindeutige Lösung sowohl von (2.1) wie von (1.1) ermöglicht werden. Wir sind an der *Gesamtheit* solcher Vorgaben interessiert.

Satz. *Auf den Charakteristiken* (Fig. 1) *werden die stetigen Vorgaben getroffen*:

(1) $U^1 = \Psi^1$ *ist auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$, $U^n = \Psi^n$ *auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}$ *vorgegeben.*

(2) $U^\sigma = \Psi^\sigma$ *ist für* $\sigma = 2, \ldots, n-1$ *auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{\sigma-1}$ *vorgegeben.*

(3) $U^\sigma = \Phi^\sigma$ *ist für* $\sigma = 2, \ldots, n-1$ *auf genau einer der Charakteristiken* $\mathfrak{c}_{\sigma+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ *vorgegeben mit stetigem Zusammenschluß in* P_0 *mit den Vorgaben in* (2).

Dann gibt es unter V_{N_1} *für alle* $P \in \mathfrak{A}(P_0)$ *bei festem* P_0 *und* $\mathfrak{A}(P_0) < \mathfrak{G}$ *genau ein Lösungssystem* $U^\tau(P)$ *von* (2.1) *mit* U^τ, $U^\tau_{|\alpha^\tau} \in \mathfrak{C}^0$, *welches auf* $\mathfrak{c}_\tau$ *die gemachten Vorgaben erfüllt. Sind* Ψ, $\Phi \in \mathfrak{C}^1$, *so ist* $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ *für* V_{N_2}. Der Existenzbereich für $U^\tau(P)$ kann bekanntlich noch erweitert werden.

Folgerungen: (a) Aus (2) und (3) folgt, daß U^2 auf $\mathfrak{c}_1$, U^{n-1} auf $\mathfrak{c}_n$ vorgegeben werden muß. (b) U^σ darf nicht auf $\mathfrak{c}_\sigma$ vorgegeben werden. (c) Bei n Charakteristiken sind genau $2n-2$ Vorgaben nötig.

Beispiele für $n=4$:

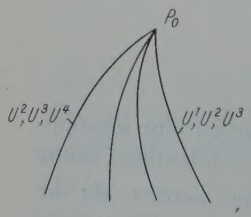

Fig. 2

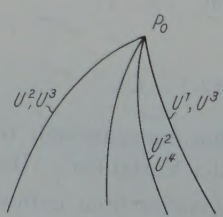

Fig. 3

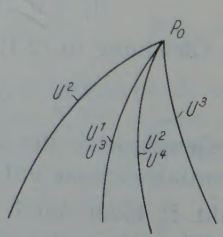

Fig. 4

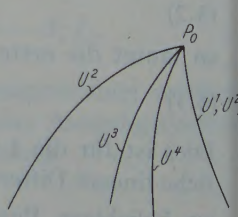

Fig. 5

Der Beweis ist wieder durch ein Iterationsverfahren zu erbringen, indem man das C-Problem für $U^\tau_{|\alpha} = C^\tau$ als ersten Schritt verwendet. Die dabei zu verwendende Integrationstechnik ist aus Fig. 6 ersichtlich, die die zu verwendenden Integrationswege für das Beispiel der Fig. 4 angibt. Damit ist auch die Gesamtheit der C-Probleme für (1.1) aufgefunden, indem man die entsprechenden Linearkombinationen (1.8) $g^\tau_j u^j$ vorgibt. Man nennt diejenigen Probleme für (1.1) *ausgezeichnete*, die zu ihrer Formulierung die g^τ_j nicht benötigen, wo also die u^j einzeln auf den Charakteristiken vorgegeben sind. *Auf solche Probleme führen genau diejenigen C-Probleme für die Normalform* (2.1), *bei denen Vorgaben nur auf den Außencharakteristiken gemacht worden sind* (Fig. 2). Über die erste und letzte Gleichung in (2.1) ist dann nämlich U^1 auf $\mathfrak{c}_1$, U^n auf $\mathfrak{c}_n$ eindeutig berechenbar. Mit dieser Bemerkung kann auch die Gesamtheit der ausgezeichneten C-Probleme für (1.1) leicht angegeben werden.

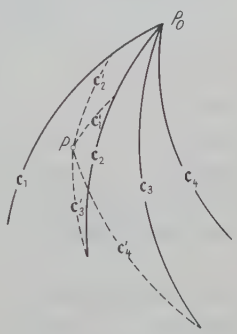

Fig. 6

3. Das verallgemeinerte C-Problem. Die Gesamtheit dieser Probleme entsteht aus unseren Überlegungen in Nr. 2 dadurch, daß noch geeignete Sprünge S^τ der Funktion U^τ längs der Charakteristik $\mathfrak{c}_\sigma$ vorgegeben werden. (Man vergleiche auch F. Rellich [*11*] für Differentialgleichungen n-ter Ordnung.) Bezeichnen wir das durch $\mathfrak{c}_\varrho$, $\mathfrak{c}_{\varrho-1}$ und $\mathfrak{k}$ begrenzte abgeschlossene Gebiet mit $\overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0)$ (Fig. 1) und U^τ dort mit $\overset{\varrho}{U}{}^\tau$, so gilt

$$\mathfrak{A}(P_0) = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0). \tag{3.6}$$

Die neue Gesamtheit erhalten wir dann aus der Nr. 2 durch die Ergänzung

(4) *Längs der Innencharakteristiken* $\mathfrak{c}_\gamma$, $\gamma = 2, \ldots, n-1$ *werden die Sprünge* $\overset{\gamma}{S}{}^\tau$ *der Funktion* U^τ

$$\overset{\gamma}{S}{}^\tau = \overset{\gamma-1}{U}{}^\tau - \overset{\gamma}{U}{}^\tau, \quad \tau \neq \gamma, \ \tau = 1, \ldots, n \tag{3.7}$$

willkürlich aber stetig vorgegeben, so daß in P_0 *die Verträglichkeitsbedingung*

$$\overset{1}{U}{}^\tau(P_0) - \overset{n-1}{U}{}^\tau(P_0) = \sum_{\nu=2}^{n-1} \overset{\nu}{S}{}^\tau(P_0) \tag{3.8}$$

erfüllt ist.

Die Lösung $\overset{\gamma}{U}{}^\tau$ hat dann die Eigenschaft $\overset{\gamma}{U}{}^\tau, \overset{\gamma}{U}{}^\tau_{|\alpha} \in \mathfrak{C}^0$ in $\overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0)$ bei V_{N_1} und entsprechend $\overset{\gamma}{U}{}^\tau(P_0) \in \mathfrak{C}^1$ in $\overset{\varrho}{\mathfrak{A}}(P_0)$ bei V_{N_2}, $\gamma = 2, \ldots, n-1$, $\varrho = 1, \ldots, n-1$. Die Formulierung solcher verallgemeinerten Probleme ist auch für (1.1) unter V_{A_2} leicht möglich.

Auch für Anfangs-Randwertprobleme kann eine ähnliche Vollständigkeit erreicht werden [*6*].

§ 4. Auflösungsformeln

1. Reduktionsformeln. $U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ seien Lösungen des A-Problems (2.1) mit $U^\tau = \Psi^\tau$ auf $\mathfrak{k}$ und $Z_\tau, \overline{Z}_\tau$ zwei Lösungen der C-Probleme (2.9b) mit

(4.1) $Z_n = 0$ auf $\mathfrak{c}_1$, $Z_1 = 1$ auf $\mathfrak{c}_n$, $Z_\mu = 0$ auf $\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_n$, $\mu = 2, \ldots, n-1$;

(4.2) $\overline{Z}_n = 1$ auf $\mathfrak{c}_1$, $\overline{Z}_1 = 0$ auf $\mathfrak{c}_n$, $\overline{Z}_\mu = 0$ auf $\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_n$, $\mu = 2, \ldots, n-1$.

(2.7) ergibt dann mit $\varrho = 1$, $\sigma = n$ in (2.2) bei Beachtung von (2.10)

$$\int_{\dot{\mathfrak{A}}(P_0)} \omega = \int_{P_1}^{P_n} \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau U^\tau (s^\tau \underset{n}{\omega} - t^\tau \underset{1}{\omega}) + \int_{P_n}^{P_0} U^1 \underset{n}{\omega} = \iint_{\mathfrak{A}(P_0)} \sum_{\tau=1}^{n} Z_\tau C^\tau [\underset{1}{\omega}, \underset{n}{\omega}] \tag{4.3}$$

oder

$$U^1(P_0) = H(Z_1, \ldots, Z_n)_{|\alpha}^{n} \tag{4.4}$$

mit

$$H(Z_1, \ldots, Z_n) = \sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \int_{P_1}^{P_n} Z_\tau \Psi^\tau (t^\tau \underset{1}{\omega} - s^\tau \underset{n}{\omega}) + \iint_{\mathfrak{A}(P_0)} Z_\tau C^\tau [\underset{1}{\omega}, \underset{n}{\omega}] \right\} \tag{4.5}$$

und entsprechend

$$U^n(P_0) = H(\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_n)_{|\alpha}^{1}. \tag{4.6}$$

Damit ist (2.1) auf $n-2$ Gleichungen reduziert. Ist $n = 2p$ bzw. $2p+1$, so sind nach p bzw. $p+1$ Reduktionen Auflösungsformeln für alle U^τ hergestellt.

2. Auflösungsformeln. $Z_\tau \in \mathfrak{C}^1$ seien Lösungen eines verallgemeinerten C-Problems (2.9b). Da nur ein Sprung auftreten wird, machen wir von der Bezeichnungsweise in § 3,3 keinen Gebrauch. Für $\tau = 1, \ldots, n-1$ sei

$$\begin{cases} Z_\mu = 0, \quad \mu = 2, \ldots, n \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_1, \\ Z_\tau = 1, \quad Z_\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, n-1, \quad \mu \neq \tau \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_n, \\ Z_\tau \text{ macht auf } \mathfrak{c}_\tau \text{ einen Sprung (3.7) der Höhe } -1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Der Integralsatz (2.7) liefert mit $\varrho = 1$, $\sigma = n$

$$\int_{P_n}^{P_0} U^\tau t^\tau \underset{n}{\omega} = H(Z_1, \ldots, Z_n) + \int_{P_\tau}^{P_0} U^\tau (s^\tau \underset{n}{\omega} - t^\tau \underset{1}{\omega}). \tag{4.8}$$

Nach (2.10) verschwindet das letzte Integral und wir erhalten

$$U^\tau(P_0) = \frac{1}{t^\tau(P_0)} H(Z_1, \ldots, Z_n)_{|\alpha}^{n}, \quad \tau = 1, \ldots, n-1. \tag{4.9}$$

Setzen wir jetzt $\tau = 2, \ldots, n$ und erklären wir $\overline{Z}_\tau$ als Lösungen des verallgemeinerten C-Problems (2.9b) mit

$$\begin{cases} \overline{Z}_\tau = 1, \quad \overline{Z}_\mu = 0, \quad \mu = 2, \ldots, n, \quad \mu \neq \tau \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_1, \\ \overline{Z}_\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, n-1 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_n, \\ Z_\tau \text{ macht auf } \mathfrak{c}_\tau \text{ einen Sprung (3.7) der Höhe } 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

so finden wir entsprechend

$$U^\tau(P_0) = \frac{1}{s^\tau(P_0)} H(\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_n)_{|\frac{1}{\alpha}}, \qquad \tau = 2, \ldots, n. \tag{4.11}$$

Damit sind explizite Auflösungsformeln für alle U^τ gewonnen. Sie enthalten die Auflösungsformeln von E. Holmgreen [8] für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Für Auflösungsformeln ähnlichen Charakters für partielle Differentialgleichungen n-ter Ordnung vergleiche man E. Holmgreen [7] und F. Rellich [11]. Man beachte, daß wir stets nur *ausgezeichnete* C-Probleme verwendet haben. Damit sind auch sofort explizite Auflösungsformeln für das A-Problem (1.1) aufgefunden.

3. Die Riemannsche Methode. Die in Nr. 2 erzielten Auflösungsformeln wollen wir nicht als eine Verallgemeinerung der klassischen Riemannschen Methode bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ansehen, da eigentlich nur die Auflösung nach Integralausdrücken über U^τ gelingt, und U^τ nur durch Differentiationsprozesse gewonnen wird. Wir geben jetzt eine *echte* Verallgemeinerung.

$U^\tau \in \mathfrak{C}^1$ seien wieder Lösungen des A-Problems (2.1) mit $U^\tau = \Psi^\tau$ auf $\mathfrak{k}$. In Fig. 1 werden zwei Charakteristiken $\mathfrak{c}_\varrho, \mathfrak{c}_\sigma$ $(\varrho < \sigma)$ beliebig ausgewählt. Nach getroffener Wahl sind ϱ, σ *feste* Indizes. $\overset{\gamma}{Z}_\tau \in \mathfrak{C}^1$ in $\overset{\mu}{\mathfrak{A}}(p_0)$, $\gamma = 2, \ldots, n-1$, $\mu = 1, \ldots, n-1$ seien Lösungen eines noch festzulegenden verallgemeinerten C-Problems von (2.9b). Die längs der Innencharakteristiken auftretenden Sprünge von $\overset{\gamma}{Z}_\tau$ werden analog zu (3.7) mit $\overset{\gamma}{S}_\tau$ bezeichnet. Den oberen Index in $\overset{\gamma}{Z}_\tau$ werden wir im allgemeinen fortlassen. Der Integralsatz (2.7) wird dann

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \int_{P_1}^{P_0} Z_\tau U^\tau\left(t^\tau \omega_\varrho - s^\tau \omega_\varrho\right) + \int_{P_n}^{P_0} Z_\tau U^\tau\left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) + \right. \\ \left. \quad + \displaystyle\sum_{\gamma=2}^{n-1} \int_{P_\gamma}^{P_0} \overset{\gamma}{S}_\tau U^\tau\left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) \right\} = H(Z_1, \ldots, Z_n), \end{cases} \tag{4.12}$$

$$H(Z_1, \ldots, Z_n) = \sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \iint_{\mathfrak{A}(P_0)} Z_\tau C^\tau[\omega_\varrho, \omega_\sigma] + \int_{P_1}^{P_n} Z_\tau \Psi^\tau\left(t^\tau \omega_\varrho - s^\tau \omega_\sigma\right) \right\}, \tag{4.13}$$

wobei natürlich die Integrale in H wegen der Unstetigkeiten von Z_τ in Teilintegrale aufgespalten werden müssen. Nach (3.7) ist

$$\overset{\gamma}{S}_\tau = \overset{\gamma-1}{Z}_\tau - \overset{\gamma}{Z}_\tau, \quad \gamma = 2, \ldots, n-1. \tag{4.14}$$

Wir setzen ferner

$$\overset{1}{S}_\tau = -Z_\tau \text{ auf } \mathfrak{c}_1, \quad \overset{n}{S}_\tau = Z_\tau \text{ auf } \mathfrak{c}_n. \tag{4.15}$$

Dann erscheint (4.12) in der Form

$$\sum_{\tau=1}^{n} \left\{ \sum_{\gamma=1}^{n} \int_{P_\gamma}^{P_0} \overset{\gamma}{S}_\tau U^\tau\left(s^\tau \omega_\sigma - t^\tau \omega_\varrho\right) \right\} = H(Z_1, \ldots, Z_n), \tag{4.16}$$

wobei die Summe wegen der Relation (2.10) nur über die Glieder mit $\gamma \neq \tau$ zu erstrecken ist. Wir denken uns die n^2 Größen $\overset{\gamma}{S}_\tau$ in ein quadratisches Schema angeordnet mit γ als Zeilenindex und setzen alle $\overset{\gamma}{S}_\tau$ Null sofern sie nicht in der Hauptdiagonalen oder in der ϱ-ten Zeile stehen:

$$\overset{\gamma}{S}_\tau = 0 \quad \text{falls} \quad \gamma \neq \tau \quad \text{und} \quad \gamma \neq \varrho. \tag{4.17}$$

Dies sind $(n-1)^2$ Forderungen. Dann reduziert sich (4.16) auf

$$-\sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \neq \varrho}}^{n} \int_{P_\varrho}^{P_0} \overset{\varrho}{S}_\tau U^\tau t^\tau \underset{\varrho}{\omega} = H(Z_1, \ldots, Z_n) \tag{4.18}$$

wegen $\underset{\varrho}{\omega} = 0$ auf $\mathfrak{c}_\varrho$. Wir betrachten jetzt die ϱ-te Gleichung in (2.1). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß es einen *festen* Index $\varepsilon \neq \varrho$ so gibt, daß $A^\varrho_\varepsilon \not\equiv 0$ ist. — Wäre dies nicht der Fall, so könnte $U^\varrho(P_0)$ aus der ϱ-tenGleichung gemäß § 3,1 berechnet werden, und zwar ohne Differentiationsprozesse. Die Auflösungsformel für $U^\varrho(P_0)$ wäre damit im Sinne von RIEMANN geliefert und die Riemannsche Methode nur noch für ein System mit $(n-1)$ Unbekannten aufzufinden. Für dieses System sind dann entweder unsere Überlegungen wieder verwendbar oder es reduziert sich auf ein System mit $(n-2)$ Unbekannten usw. — Die ϱ-te Gl. (2.1) wird dann

$$A^\varrho_\varepsilon U^\varepsilon = U^\varrho_{|\alpha} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \varepsilon}}^{n} A^\varrho_j U^j - C^\varrho. \tag{4.19}$$

Wegen eventueller Nullstellen von A^ϱ_ε ist ein kleiner Kunstgriff nötig (vgl. [4], S. 344). Wir setzen

$$\overset{\varrho}{S}_\varepsilon = A^\varrho_\varepsilon \overset{\varrho}{T}_\varepsilon \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_\varrho \tag{4.20}$$

und erhalten für (4.18)

$$-\sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \neq \varrho, \varepsilon}}^{n} \int_{P_\varrho}^{P_0} \overset{\varrho}{S}_\tau U^\tau t^\tau \underset{\varrho}{\omega} - \int_{P_\varrho}^{P_0} \overset{\varrho}{T}_\varepsilon A^\varrho_\varepsilon U^\varepsilon t^\varepsilon \underset{\varrho}{\omega} = H. \tag{4.21}$$

Im vorletzten Glied verwenden wir (4.19) und erhalten für (4.21)

$$-\int_{P_\varrho}^{P_0} \left\{ \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon (U^\varrho_{|\alpha} - A^\varrho_\varrho U^\varrho) - \sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \neq \varrho, \varepsilon}}^{n} U^\tau (\overset{\varrho}{S}_\tau t^\tau - \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon A^\varrho_\tau) - \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon C^\varrho \right\} \underset{\varrho}{\omega} = H. \tag{4.22}$$

Nun ist im ersten Glied partielle Integration möglich und das Weitere verläuft in Analogie zu RIEMANN. Durch

$$(\overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon)_{|\alpha} + A^\varrho_\varrho \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon = 0 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_\varrho, \qquad \overset{\varrho}{T}_\varepsilon t^\varepsilon \big|_{P_0} = -1 \tag{4.23}$$

ist $\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}$ und damit gemäß (4.20) $\overset{\varrho}{S}_{\varepsilon}$ auf $\mathfrak{c}_{\varrho}$ eindeutig festgelegt. Ferner wird verlangt

$$A^{\varrho}_{\tau}\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}t^{\varepsilon}=\overset{\varrho}{S}_{\tau}t^{\tau} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{c}_{\varrho} \quad \text{für} \quad \tau\neq\varrho,\varepsilon. \tag{4.24}$$

Damit sind alle $\overset{\varrho}{S}_{\tau}$ außerhalb der Hauptdiagonalen eindeutig festgelegt. Durch die n Verträglichkeitsbedingungen (3.8) für Z_{τ} werden die $\overset{\tau}{S}_{\tau}$, $\tau=1,\ldots,n$ im Punkte P_0 eindeutig festgelegt. Somit ist für Z_{τ} in der Tat ein ausgezeichnetes verallgemeinertes C-Problem festgelegt worden. Aus (4.22) folgt nun sofort

$$\overset{\varrho}{U}(P_0)=H(Z_1,\ldots,Z_n)-\int_{P_{\varrho}}^{P_0}\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}t^{\varepsilon}C^{\varrho}\underset{\varrho}{\omega}-\overset{\varrho}{T}_{\varepsilon}\Psi^{\varrho}t^{\varepsilon}\Big|P_{\varrho}, \tag{4.25}$$

gültig für $\varrho=1,\ldots,n-1$. Ganz entsprechend findet man eine Auflösungsformel für $U^{\sigma}(P_0)$ für $\sigma=2,\ldots,n$. Durch arithmetische Mittelbildung können die Auflösungsformeln noch symmetrisch im Aufbau gemacht werden. Gleichzeitig ist auch eine echte Verallgemeinerung der Riemannschen Methode für das A-Problem (1.1) aufgefunden, da nur ausgezeichnete C-Probleme benutzt worden sind.

Literatur

[1] Blaschke, W., u. G. Bol: Geometrie der Gewebe. Berlin 1938. — [2] Cartan, E.: Les systèmes differéntiels extérieurs et leurs applications géométriques. Paris 1945. — [3] Courant, R., and K. O. Friedrichs: Supersonic flow and shock waves. New York 1948. — [4] Haack, W., u. G. Hellwig: Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. I. Math. Z. **53**, 244—266 (1950); II. Math. Z. **53**, 340—356 (1950). — [5] Haack, W.: Elementare Differentialgeometrie. Basel 1955. — [6] Hellwig, G.: Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. Diss. der Techn. Universität Berlin-Charlottenburg 1951. — [7] Holmgreen, E.: Sur l'extension de la méthode d'intègration de Riemann. Ark. Mat., Astr. och Fysik **1**, 317—326 (1904). — [8] Holmgreen, E.: Sur les systemes lineares aux dérivées partielles du premier ordre. Ark. Mat., Astr. och Fysik **6**, Nr. 2 (1911). — [9] Lax, P.: The initial value problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Ann. of Math. Studies, Nr. 33, Princeton 1954. — [10] Petrowski, I. G.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Leipzig 1955. — [11] Rellich, F.: Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen. Math. Ann. **103**, 249—278 (1930).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität

(Eingegangen am 26. März 1957)

RAGAB, F. M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 338/339 (1958)

Some Formulae for the Product of Bessel and Legendre Functions

By
F. M. RAGAB

Introduction. The basic formula to be proved is

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\sigma} E\left\{p;\alpha_r:q;\varrho_t:\frac{z}{1+\lambda}\right\} {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta;\\ \gamma\end{matrix}-\lambda\right) d\lambda \\
&\quad = \Gamma(\gamma)\frac{\sin\pi\sigma\sin\pi(\alpha+\beta-\gamma+\sigma)}{\sin\pi(\alpha-\gamma+\sigma)\sin\pi(\beta-\gamma+\sigma)}\times \\
&\qquad \times E\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\ 1-\sigma,\ 1-\alpha-\beta+\gamma-\sigma:z\\ \varrho_1,\ldots,\varrho_q,\ 1-\alpha+\gamma-\sigma,\ 1-\beta+\gamma-\sigma\end{matrix}\right)+ \\
&\qquad + \sum_{\alpha,\beta}\left[\frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)\sin\pi\beta}{\sin\pi(\gamma-\alpha-\sigma)\sin\pi(\beta-\alpha)}\Gamma(\gamma)\,z^{-(\alpha-\gamma+\sigma)}\times\right. \\
&\qquad \left.\times E\left(\begin{matrix}\alpha_1+\alpha-\gamma+\sigma,\ldots,\alpha_p+\alpha-\gamma+\sigma,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1-\beta:z\\ \varrho_1+\alpha-\gamma+\sigma,\ldots,\varrho_q+\alpha-\gamma+\sigma,\ 1+\alpha-\gamma+\sigma,\ 1+\alpha-\beta\end{matrix}\right)\right]
\end{aligned}
\right.
$$

where $R(\gamma)>0$, $R(\alpha-\gamma+\sigma+\alpha_r)>0$, $R(\beta-\gamma+\sigma+\alpha_r)>0$ $r=1,2,3,\ldots,p$, and $p\geqq q+1$. For other values of p and q, the formula holds if the integral converges. In (1), z is taken for simplicity to be real and positive and $\sum_{\alpha,\beta}$ denotes that to the expression following it the corresponding expression with α,β interchanged is to be added. For the definitions and properties of the E-functions the reader is referred to [1] p. 352. Integrals involving the product of Legendre and Bessel functions are deduced from (1) by substituting for the hypergeometric and E-functions from the following formulae respectively

$$
(2)\qquad P_n^m(1+2\lambda)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\{\lambda(1+\lambda)\}^{-\frac{1}{2}m}F\left(\begin{matrix}-m-n,\ n-m+1;\\ 1-m\end{matrix}-\lambda\right)
$$

$$
(3)\qquad \cos\nu\pi\, E\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2}-\nu::\ 2z\\ 1\end{matrix}-\lambda\right)=\left(\frac{2\pi z}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)K_\nu\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)
$$

and

$$
(4)\qquad E\left(\nu+1:\frac{z}{1+\lambda}\right)=\left(\frac{z}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{2}\nu}I_\nu\left\{2\sqrt{\left(\frac{1+\lambda}{z}\right)}\right\}
$$

which are to be found in [1] pp. 262, 351 and 414 respectively. The following formulae are required in the proof of (1):

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\sigma}E\{p;\alpha_r:q;\varrho_t:z(1+\lambda)\}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta;\\ \gamma\end{matrix}-\lambda\right)d\lambda \\
&\quad = \Gamma(\gamma)\,E\left(\begin{matrix}p;\alpha_r,\alpha-\gamma+\sigma,\beta-\gamma+\sigma:z\\ q;\varrho_t,\sigma,\alpha+\beta-\gamma+\sigma\end{matrix}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

where $R(\gamma)>0$, $R(\alpha-\gamma+\sigma)>0$, $R(\beta-\gamma+\sigma)>0$, $R(z)>0$ see [2] p. 133 formula (7).

If $p \geq q+1$,

$$(6)\quad \begin{cases} E(p;\alpha_r : q;\varrho_t : z) = \pi^{p-q-1} \sum_{r=1}^{p} \prod_{t=1}^{q} \sin\{(\varrho_t - \alpha_r)\pi\} \left\{ \prod_{t=1}^{p}{}' \sin(\alpha_t - \alpha_r)\pi \right\}^{-1} \times \\ \qquad \times z^{\alpha_r} E\left\{ \begin{matrix} \alpha_r, \alpha_r - \varrho_1 + 1, \ldots, \alpha_r - \varrho_q + 1 : \dfrac{e^{\pm i\pi(p-q-1)}}{z} \\ \alpha_r - \alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_r - \alpha_p + 1 \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

([1] pp. 352, 353 formulae (21), (22), (33)).

Proof of the formula. Consider the special case of (1) with $p=1$, $q=0$; then the left hand side becomes

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\sigma} E\left\{ \alpha_1 : : \frac{z}{1+\lambda} \right\} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta; \\ \gamma \end{matrix} -\lambda \right) d\lambda \\ &\quad = z^{-\alpha_1} \int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\alpha_1-\sigma} E\left\{ a_1 : : \frac{1+\lambda}{z} \right\} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta; \\ \gamma \end{matrix} -\lambda \right) d\lambda \\ &\quad = z^{-\alpha_1}\Gamma(\gamma) E\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha-\gamma+\alpha_1+\sigma, \beta-\gamma+\alpha_1+\sigma : 1/z \\ \alpha+\beta-\gamma+\alpha_1+\sigma, \alpha_1+\sigma \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

by (5). Here expand the last E-function by means of (6) and so obtain (1) with the special case $p=1$, $q=0$. The general case can then be deduced in the usual way (see [3] p. 193).

Particular case: In (1) take $p=2$, $q=0$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}+\nu$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}-\nu$, $\alpha = -m-n$, $\beta = n-m+1$, $\gamma = 1-m$, write $2z$ for z; then apply (2) and (3) and so obtain the following result:

$$(7)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}m}(1+\lambda)^{\frac{1}{2}m-\sigma-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{z}{1+\lambda}\right) K_\nu\left(\frac{z}{1+\lambda}\right) P_n^m(1+2\lambda)\, d\lambda \\ = \dfrac{\cos\nu\pi}{\sqrt{(2\pi z)}} \cdot \dfrac{\sin(\pi\sigma)\sin\pi(\sigma-m)}{\sin\pi(\sigma-n)\sin\pi(n+\sigma)} E\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}-\nu, 1-\sigma, 1+m-2\sigma : 2z \\ 2+n-\sigma, 1-n-\sigma \end{matrix} \right\} + \\ \quad + \dfrac{\cos\nu\pi}{\sqrt{(2\pi z)}} \cdot \dfrac{\sin(\pi n\sin\pi(m-n)}{\sin\pi(\sigma-n)\sin(2n\pi)} (2z)^{-(-n-1+\sigma)} \times \\ \quad \times E\left\{ \begin{matrix} \nu-\frac{1}{2}-n+\sigma, -\nu-\frac{1}{2}-n+\sigma, -n, m-n : 2z \\ -n+\sigma, -2n \end{matrix} \right\} + \\ \quad + \dfrac{\cos\nu\pi}{\sqrt{(2\pi z)}} \cdot \dfrac{\sin(\pi n)\sin\pi(m+n)}{\sin\pi(n+\sigma)\sin\pi(2n+1)} (2z)^{-(n+\sigma)} \times \\ \quad \times E\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}+\nu+n+\sigma, \frac{1}{2}-\nu+n+\sigma, 1+n, 1+m+n : 2z \\ 1+n+\sigma, 2+2n \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

where $R(z)>0$, $R(1-m)>0$, $R(-\frac{1}{2}-n+\sigma \pm \nu)>0$.

References

[1] MacRobert, T. M.: Functions of a complex variable, 4th ed. Glasgow 1954. — [2] Rathie, C. B.: Some results involving hypergeometric and E-functions. Proc. Glasgow Math. Assoc. **2**, 132—138 (1955). — [3] Ragab, F. M.: Integrals of E-functions expressed in terms of E-functions. Proc. Glasgow Math. Assoc. **1**, 192—195 (1953).

Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (U.S.A.) and
Faculty of Science, Ein Shams University, Abbassia, Cairo (Egypt)

(Eingegangen am 21. Mai 1957)

Suschowk, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 340–361 (1958)

Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung, Tschebyscheffsche Polynome und Legendresche Funktionen 2. Art

Von
Dietrich Suschowk

§ 1. Einleitung und Zusammenfassung

Fragen der Hochgeschwindigkeitsaerodynamik führen zu der Aufgabe, Lösungen $v(t, x, y)$ der Wellengleichung

$$\alpha^2 v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} = 0 \tag{1}$$

zu finden, die samt ihren ersten partiellen Ableitungen in den Punkten des charakteristischen Strahlenhalbkegels

$$t^2 - \alpha^2(x^2 + y^2) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

verschwinden, im Inneren dieses Kegels, d.h. für Punkte (t, x, y) mit

$$t^2 - \alpha^2(x^2 + y^2) > 0, \qquad t > 0 \tag{2'}$$

jedoch nicht identisch Null sind. Nach dem Eindeutigkeitssatz für die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung (vgl. [1], S. 380) können Lösungen von (1) mit dieser Eigenschaft nicht in allen inneren Punkten von (2) der Wellengleichung genügen. Deshalb besitzen die im folgenden angegebenen Lösungen dieser Aufgabe im Inneren von (2) Singularitäten; und zwar sind es die Punkte der „Achse" $x^2 + y^2 = 0$ von (2), in denen die Lösungsfunktionen nicht differentiierbar sind. Diese Funktionen scheinen bisher nicht eingehender untersucht worden zu sein (vgl. jedoch [1], S. 167–169 und S. 403–408).

Wir werden im folgenden zunächst für jede der aus (1) nach Einführung von Zylinderkoordinaten

$$x = r \sin \omega, \qquad y = r \cos \omega \qquad (r > 0,\ 0 \leq \omega < 2\pi)$$

und durch den Separationsansatz

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(t, r) \cdot (a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega) \sim u(t, r, \omega) := v(t, r \sin \omega, r \cos \omega) \tag{3}$$

hervorgehenden Gleichungen

$$\Delta_k u^{(k)} := \alpha^2 u^{(k)}_{tt} - u^{(k)}_{rr} - \frac{1}{r} u^{(k)}_r + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

eine noch von einer weitgehend willkürlichen Funktion f_k abhängende Lösung angeben, welche die Anfangsbedingungen

$$(5)\qquad \begin{cases} u^{(k)} = 0, \quad u_t^{(k)} = 0, \quad u_r^{(k)} = 0 \\ \text{für Punkte } (t, r) \text{ mit } t^2 - \alpha^2 r^2 = 0, \quad t > 0,\ r > 0 \end{cases}$$

erfüllt. Die angekündigten Lösungen von (4) haben die Gestalt

$$(6)\qquad u^{(k)}(t, r) = \int_0^{t-\alpha r} \frac{T_k\left(\frac{t-\sigma}{\alpha r}\right)}{\sqrt{(t-\sigma)^2 - \alpha^2 r^2}} f_k(\sigma)\, d\sigma \qquad (\alpha > 0,\ t - \alpha r \geqq 0),$$

wo T_k das k-te Tschebyscheffsche Polynom bedeutet und f_k eine noch weitgehend beliebige Funktion ist, die zur Verfügung steht, um $u^{(k)}(t, r)$ bzw. $u(t, r, \omega)$ weiteren (insbesondere Rand-) Bedingungen anzupassen. Wir werden verschiedene Integraldarstellungen dieser Funktionen angeben, ihre Singularitäten untersuchen und zeigen, daß je endlich viele dieser Funktionen linear unabhängig sind. [Die unter (6) stehenden Funktionen sind in den Fällen $k = 0$ bzw. $k = 1$ in der Aerodynamik als „Quell-Senken-Lösungen" bzw. „Dipol-Lösungen" von (4) zu den Anfangsbedingungen (5) wohlbekannt, ohne daß sich allerdings die Tschebyscheffschen Polynome im Kern von (6) in diesen einfachen Fällen zu erkennen gegeben hätten; vgl. [5], S. 51, Formel (99) und (100).]

Unter der zusätzlichen Annahme, daß f_k im Intervall $[0, \Lambda[$ die Darstellung

$$(7)\qquad f_k(\lambda) = a_{k1}\lambda + a_{k2}\lambda^2 + \cdots$$

gestattet, erhält man für (6) die in dem Streifen

$$\{(t, r):\ 0 \leqq t - \alpha r < \Lambda;\ t > 0,\ r > 0\}$$

konvergente Entwicklung

$$(8)\qquad u^{(k)}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}(t^2 - \alpha^2 r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}\right),$$

in der Q_n^k die n, k-te Legendresche (Kugel-)Funktion 2. Art bedeutet (vgl. [4], S. 135ff.) und

$$c_{kn} = (-1)^k a_{kn} \frac{n!}{(n+k)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Die in (7) gestellte Forderung $f_k(0) = 0$ erweist sich als notwendige Bedingung für das Verschwinden von $u_t^{(k)}$ und $u_r^{(k)}$ auf der Charakteristik $t - \alpha r = 0$ von (4). Der Übergang von (6) zu (8) gelingt vermöge einer Integraldarstellung

der Legendreschen Funktionen 2. Art, welche diese Funktionen mit den Tschebyscheffschen Funktionen in Beziehung setzt. Diese Relation wird für komplexe Indizes angegeben. Wir gehen danach auf die Frage nach der Konvergenz der in (3) stehenden formalen Entwicklung ein. Es zeigt sich, daß die Forderung nach der Konvergenz dieser Entwicklung scharfe Einschränkungen für die „Dichte"-Funktionen f_k, ihre „Größe" mit wachsendem k betreffend, nach sich zieht. Schließlich beweisen wir die Existenz von Lösungen der eingangs gestellten Aufgabe auch für den Fall, in dem unendlich viele (nicht identisch verschwindende) $u^{(k)}$ auftreten.

§ 2. Die Lösungen des Anfangswertproblems (4), (5)

Da durch eine einfache Maßstabsänderung der t-Koordinate in allen vorstehenden Ausdrücken ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit α zu 1 gemacht werden kann, nehmen wir fortan $\alpha = 1$. Weiterhin wollen wir die Indizierung der f_k vorerst unterdrücken.

Die im folgenden an (6) auszuführenden Differentiationen lassen eine Umformung des dort auftretenden Integrals angebracht erscheinen. Nimmt man die Substitution $t - \sigma = r\tau$ vor, so geht (6) über in

$$(9) \qquad u^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f(t-r\tau)\, d\tau \qquad \left(\frac{t}{r} \geq 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Von dieser Darstellung für $u^{(k)}$ ausgehend, beweisen wir den

Satz 1. *Es sei f nicht identisch null, zweimal differentiierbar und f'' über jedes endliche Intervall im Riemannschen Sinne (eigentlich) integrierbar sowie $f(0) = 0$. Ferner sei*

$$T_k(\tau) = \frac{1}{2}\left[(\tau + \sqrt{\tau^2-1})^k + (\tau - \sqrt{\tau^2-1})^k\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

das k-te Tschebyscheffsche Polynom. Dann ist, wie f im übrigen auch gewählt sein mag, jede der Funktionen (6) *bzw.* (9) *für $\{(t,r): t - r \geq 0, r > 0\}$ eine Lösung der Gl.* (4), *welche den Anfangsbedingungen* (5) *genügt.*

Beweis. Durch Differentiation von (9) erhalten wir

$$(10a) \qquad u_t^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t-r\tau)\, d\tau + \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f(0)$$

und

$$(10b) \qquad u_r^{(k)}(t,r) = -\int_1^{t/r} \frac{\tau\, T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t-r\tau)\, d\tau - \frac{t}{r} \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f(0).$$

Wegen der Voraussetzung $f(0)=0$ verschwinden die integralfreien Summanden in (10a) und (10b). Da wir jedoch hernach vorübergehend den Fall $f(0)\neq 0$ zu betrachten haben, sind diese Glieder hier aufgenommen. Unter Berücksichtigung von $f(0)=0$ liefert die nochmalige Differentiation von (10a) und (10b)

$$u_{tt}^{(k)}(t,r)=\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}f''(t-r\tau)\,d\tau+\frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}f'(0) \tag{10c}$$

und

$$u_{rr}^{(k)}(t,r)=\int_1^{t/r}\frac{\tau^2 T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}f''(t-r\tau)\,d\tau+\left(\frac{t}{r}\right)^2\frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}f'(0). \tag{10d}$$

Demnach erhält man

$$\Delta_k u^{(k)}=\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[f''(t-r\tau)-\tau^2 f''(t-r\tau)+\frac{\tau}{r}f'(t-r\tau)+\frac{k^2}{r^2}f(t-r\tau)\right]d\tau-$$
$$-\sqrt{t^2-r^2}\,T_k\left(\frac{t}{r}\right)f'(0)$$

oder

$$r^2\Delta_k u^{(k)}=\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[(1-\tau^2)r^2 f''(t-r\tau)+\tau r f'(t-r\tau)+k^2 f(t-r\tau)\right]d\tau-$$
$$-\sqrt{t^2-r^2}\,T_k\left(\frac{t}{r}\right)f'(0).$$

Wegen $r f'(t-r\tau)=-f_\tau(t-r\tau)$ geht die letzte Gleichung über in

$$r^2\Delta_k u^{(k)}=\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[(1-\tau^2)f_{\tau\tau}(t-r\tau)-\tau f_\tau(t-r\tau)+k^2 f(t-r\tau)\right]d\tau+ \tag{11}$$
$$+\frac{1}{r}\sqrt{t^2-r^2}\,T_k\left(\frac{t}{r}\right)f_\tau(0).$$

In den eckigen Klammern steht der lineare Differentialausdruck, der durch das k-te Tschebyscheffsche Polynom annulliert wird. Die Tschebyscheffsche Differentialgleichung ist nicht selbstadjungiert, jedoch hat wegen

$$\frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\left[(1-\tau^2)f_{\tau\tau}-\tau f_\tau\right]=-\left(\sqrt{\tau^2-1}\,f_\tau\right)_\tau$$

der Differentialausdruck

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{\tau^2-1}\,f_\tau\right)-\frac{k^2}{\sqrt{\tau^2-1}}f$$

diese Eigenschaft. Damit folgt aus (11) durch Anwendung der Lagrangeschen Identität (vgl. [3], S. 281) und unter Beachtung von $f(0)=0$

$$
\begin{aligned}
r^2 \Delta_k u^{(k)} &= \int_1^{t/r} T_k(\tau) \left[\frac{k^2}{\sqrt{\tau^2-1}} f(t-r\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{\tau^2-1}\, f_\tau(t-r\tau) \right) \right] d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) \\
&= -\sqrt{\tau^2-1} \left(T_k(\tau) f_\tau(t-r\tau) - T_k'(\tau) f(t-r\tau) \right)_{\tau=1}^{\tau=t/r} + \\
&\quad + \frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) \\
&= -\frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) + \frac{1}{r} \sqrt{t^2-r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_\tau(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist zunächst bewiesen, daß die Funktionen (6) bzw. (9) der Gl. (4) genügen. Auch die Anfangsbedingungen sind erfüllt, wie die folgenden einfachen Abschätzungen zeigen: Da f'' über jedes endliche Intervall (eigentlich) Riemann-integrierbar ist, so sind f und f' in jedem endlichen Intervall beschränkt. Es seien M bzw. M' Schranken für $|f|$ bzw. $|f'|$ in einem beliebig aber fest gewählten solchen Intervall. Dann ist

$$
\left\{
\begin{aligned}
&|u^{(k)}| = \left| \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f(t-r\tau)\, d\tau \right| \leq M\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \int_1^{t/r} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \\
&\qquad = M\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \log\left(\frac{t}{r} + \sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2 - 1} \right) \\
&|u_t^{(k)}| = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t-r\tau)\, d\tau \leq M'\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \log\left(\frac{t}{r} + \sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2 - 1} \right) \\
&|u_r^{(k)}| = \left| \int_1^{t/r} \frac{\tau\, T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f'(t-r\tau)\, d\tau \right| \leq M'\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \int_1^{t/r} \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \\
&\qquad = \frac{M'}{r}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) \sqrt{t^2-r^2}\,.
\end{aligned}
\right. \tag{12}
$$

Die rechten Seiten dieser Ungleichungen streben für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ nach Null. Also ist für $t=r>0$

$$
u^{(k)} = 0, \qquad u_t^{(k)} = 0, \qquad u_r^{(k)} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),
$$

d.h. die Anfangsbedingungen (5) sind erfüllt (und zwar werden die Anfangswerte für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ stetig angenommen). Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen uns noch davon überzeugen, daß die in Satz 1 genannte Voraussetzung $f(0)=0$ für die Gültigkeit des Satzes notwendig ist. Das kann unmittelbar aus (10a) bzw. (10b) abgelesen werden: Nach den beiden letzten unter (12) stehenden Abschätzungen verschwinden für $t=r$ die Integrale in (10a) und (10b), während im Falle $f(0)\neq 0$ die integralfreien Summanden für $\frac{t}{r}\downarrow 1$ über alle Grenzen wachsen. Demnach sind, falls $f(0)\neq 0$ ist, die Anfangsbedingungen (5) für $u_t^{(k)}$ und $u_r^{(k)}$ nicht erfüllt. [Die Differentialgleichung (4) und die Anfangsbedingung $u^{(k)}=0$ für $t=r>0$ wird jedoch auch im Falle $f(0)\neq 0$ befriedigt.]

Wir geben nun eine weitere Integraldarstellung der unter (6) bzw. (9) stehenden Funktionen an, die wir später benutzen werden.

Satz 2. *Unter den im Satz 1 angegebenen Voraussetzungen gilt für* $\{(t,r)\colon t-r\geqq 0, r>0\}$

$$u^{(0)}(t,r)=\int_0^{t-r} f'(\sigma)\log\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)d\sigma-f(t-r)\cdot\log r$$

und $(k=1,2,\ldots)$

$$u^{(k)}(t,r)=\frac{1}{2k\,r^k}\int_0^{t-r}\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k f'(\sigma)\,d\sigma-$$

$$-\frac{r^k}{2k}\int_0^{t-r}\frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k}\,d\sigma.$$

Beweis. Offenbar ist für $k=0,1,2,\ldots$

$$(13)\qquad \int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}f(t-r\tau)\,d\tau=f(t)\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau-\int_1^{t/r}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t}f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau.$$

Die Substitution $\tau=\cosh\sigma$ ergibt

$$\int_1^{\frac{t}{r}}\frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau=\int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|}T_k(\cosh\sigma)\,d\sigma.$$

Wegen

$$T_k(\tau)=\frac{1}{2}\left[\left(\tau+\sqrt{\tau^2-1}\right)^k+\left(\tau-\sqrt{\tau^2-1}\right)^k\right]$$

ist

$$T_k(\cosh\sigma)=\frac{1}{2}\left[(\cosh\sigma+\sinh\sigma)^k+(\cosh\sigma-\sinh\sigma)^k\right]=\cosh k\sigma.$$

Daraus folgt

$$(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\frac{t}{r}} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau = \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma\, d\sigma \\ \qquad = \begin{cases} \log\left(\dfrac{t}{r}+\sqrt{\left(\dfrac{t}{r}\right)^2-1}\right) & (k=0) \\ \dfrac{1}{2k}\left[\dfrac{\left(t+\sqrt{t^2-r^2}\right)^k}{r^k}-\dfrac{r^k}{\left(t^2+\sqrt{t^2-r^2}\right)^k}\right] & (k=1,2,\ldots). \end{cases} \end{cases}$$

Für das zweite der auf der rechten Seite von (13) stehenden Integrale erhält man

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r}^{t} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau + \\ + \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t-r} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau,$$

woraus sich nach (hier legitimer) Vertauschung der Integrationsreihenfolge in dem zweiten Integral der rechten Seite

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\left(\int_{t-r\tau}^{t} f'(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau = \big(f(t)-f(t-r)\big)\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau + \\ + \int_0^{t-r} f'(\sigma)\left(\int_{\frac{t-\sigma}{r}}^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau\right)d\sigma$$

ergibt. Führt man hier auf der rechten Seite den unter (14) stehenden Ausdruck für die Integrale über $T_k(\tau)/\sqrt{\tau^2-1}$ ein, so erhält man aus (13)

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,f(t-r\tau)\,d\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t-r} f'(\sigma)\log\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)d\sigma - \\ \qquad -f(t-r)\cdot\log r \qquad (k=0) \\ \dfrac{1}{2k}\left[\dfrac{1}{r^k}\displaystyle\int_0^{t-r}\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k f'(\sigma)\,d\sigma - \right. \\ \left. \quad -r^k\displaystyle\int_0^{t-r}\frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k}\,d\sigma\right] \quad (k=1,2,\ldots). \end{cases}$$

Das ist die Behauptung.

Wir haben bereits eingangs darauf hingewiesen, daß die $u^{(k)}$ nicht in allen Punkten $(t, r) \in \{(t, r): t - r \geqq 0, r \geqq 0\}$ der Gl. (4) genügen können. An Hand des Satzes 2 können wir hierzu die folgende genauere Aussage machen:

Satz 3. *Die Funktionen* $u^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *sind in keiner (einseitigen) Umgebung von* $r = 0$ *beschränkt (insbesondere also für* $r = 0$ *nicht differentiierbar). Es gilt dort mit beliebigem festem* $t = t' > 0$

$$u^{(0)}(t', r) = O(\log r) \qquad \text{falls } f(t') \neq 0$$

und

$$u^{(k)}(t', r) = O(r^{-k}) \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad \text{falls } \int_0^{t'} (t' - \sigma)^{k-1} f(\sigma)\, d\sigma \neq 0.$$

Beweis. 1) Es sei $k = 0$. In

$$u^{(0)}(t, r) = \int_0^{t-r} f'(\sigma) \log\left(t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2}\right) d\sigma - f(t - r) \log r$$

bleibt wegen

$$\int_0^{t-r} f'(\sigma) \log\left(t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2}\right) d\sigma \leq \log\left(t + \sqrt{t^2 - r^2}\right) \cdot \int_0^{t-r} |f'(\sigma)|\, d\sigma$$

der erste Summand bei festem t für $r \downarrow 0$ beschränkt. Der zweite Summand wächst für $f(t) \neq 0$[1]) mit $r \downarrow 0$ wie $\log r$ über alle Grenzen.

2) Es sei $k = 1, 2, \ldots$. In

$$u^{(k)}(t, r) = \frac{1}{2^k r^k} \int_0^{t-r} \left(t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2}\right)^k f'(\sigma)\, d\sigma - \\ - \frac{r^k}{2^k} \int_0^{t-r} \frac{f'(\sigma)}{\left(t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2}\right)^k} d\sigma$$

bleibt bei festem $t = t'$ für $r \downarrow 0$ der zweite Summand endlich, denn $t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2}$ ist für $0 \leq \sigma \leq t - r$ positiv und daher gilt zunächst nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $0 < \theta < 1$

$$I(t, r) := \int_0^{t-r} \frac{f'(\sigma)}{\left(t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2}\right)^k} d\sigma = f'\left(\theta \cdot (t - r)\right) \int_0^{t-r} \frac{d\sigma}{\left(t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2}\right)^k}.$$

Weiterhin ist wegen $r \leq t - \sigma + \sqrt{(t-\sigma)^2 - r^2} \leq t + \sqrt{t^2 - r^2}$

$$|I(t, r)| \leq \left|f'\left(\theta \cdot (t - r)\right)\right| \int_0^{t-r} \frac{d\sigma}{r^k} = \frac{t - r}{r^k} \left|f'\left(\theta \cdot (t - r)\right)\right|.$$

---

[1]) f ist stetig und wegen der im Satz 1 eingeführten Voraussetzung $f \not\equiv 0$ gibt es Werte t mit $f(t) \neq 0$.

Demnach ist

$$\left| \frac{r^k}{2k} \int_0^{t-r} \frac{f'(\sigma)}{\left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k} d\sigma \right| \leq \frac{t-r}{2k} |f'(\theta \cdot (t-r))|.$$

Die rechte Seite bleibt also für $r \downarrow 0$ beschränkt.

In

$$\tilde{I}(t,r) := \int_0^{t-r} \left(t-\sigma+\sqrt{(t-\sigma)^2-r^2}\right)^k f'(\sigma)\, d\sigma$$

kann man den Grenzübergang $r \downarrow 0$ direkt vornehmen. Man erhält

$$\tilde{I}(t,0) = 2^k \int_0^t (t-\sigma)^k f'(\sigma)\, d\sigma,$$

also bis auf einen Faktor das k-te iterierte Integral von f, welches bei geeigneter Wahl von t einen endlichen und von Null verschiedenen Wert annimmt. Daher wächst $u^{(k)}(t,r)$ (k fest) bei geeignet gewählten festen t für $r \downarrow 0$ wie r^{-k} über alle Grenzen. Satz 3 ist damit bewiesen.

Aus dem Satz 3 können wir eine Folgerung ziehen:

Satz 4. *Es sei I eine endliche Menge voneinander verschiedener natürlicher Zahlen mit möglichem Einschluß der Null. Ferner sei f_k mit $k \in I$ nicht identisch null, zweimal differentiierbar und f_k'' über jedes endliche Intervall im Riemannschen Sinne (eigentlich) integrierbar sowie $f_k(0) = 0$. Dann sind die Funktionen*

$$u^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\, d\tau$$

in dem Streifen $\{(t,r): t-r \geq 0, r>0\}$ linear unabhängig[2]).

Beweis. Gäbe es reelle Zahlen c_k so, daß

$$\sum_{k \in I} c_k \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\, d\tau = 0$$

für *alle* $(t,r) \in \{(t,r): t-r \geq 0, r>0\}$, und ist dann k' die größte der Zahlen $k \in I$ mit $c_k \neq 0$, so wäre

$$\sum_{k \in I-\{k'\}} c_k \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\, d\tau = -c_{k'} \int_1^{t/r} \frac{T_{k'}(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_{k'}(t-r\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Nach Satz 3 zeigt die rechte Seite bei geeignetem festen t für $r \downarrow 0$ das Verhalten $O(r^{-k'})$, während die linke Seite dort höchstens das Verhalten $O(r^{-(k'-1)})$ bzw. $O(\log r)$ aufweisen kann, im Widerspruch zu der Gl. (15).

[2]) Man beachte, daß die f_k, von den angegebenen Voraussetzungen abgesehen, *beliebig* gewählt werden durften; insbesondere dürfen sie *einander gleich* sein.

§ 3. Die Darstellung der Lösungen des Anfangswertproblems (4), (5) durch Legendresche Funktionen 2. Art

Gestatten die Funktionen f_k (bzw. f) im Intervall $[0, A[$ die Darstellung

$$f_k(\lambda) = a_{k1}\lambda + a_{k2}\lambda^2 + \cdots,$$

so können die Lösungen der Aufgabe (4), (5) in Gestalt unendlicher Reihen, die nach Legendreschen Funktionen 2. Art fortschreiten, dargestellt werden. Auf dieses Resultat abzielend, beweisen wir zunächst den folgenden vorbereitenden Satz, der einen Zusammenhang zwischen den Tschebyscheffschen Polynomen — oder allgemeiner den Tschebyscheffschen Funktionen — mit den Legendreschen Funktionen 2. Art herstellt.

Satz 5. *Es seien n und k nicht negative, ganze Zahlen. Q_n^k bezeichne die n, k-te Legendresche Funktion 2. Art. Dann ist für $(t, r) \in \{(t, r): t - r \geq 0, r > 0\}$*

$$(t^2 - r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right) = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} (t - r\tau)^n \, d\tau.$$

Beweis. Wir wählen in (9) speziell $f(\lambda) = \lambda^n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$u^{(k)}(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} f(t - r\tau)\, d\tau = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} (t - r\tau)^n \, d\tau. \tag{16}$$

Unterwirft man hier die unabhängigen Veränderlichen t und r der Substitution

$$t = \varrho\zeta, \qquad r = \varrho\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad (\varrho > 0,\ \zeta > 1), \tag{17}$$

so erhält man eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Gebietes $\{(t, r): t - r > 0, r > 0\}$ der (t, r)-Ebene auf das Gebiet $\{\varrho > 0, \zeta > 1\}$ der (ϱ, ζ)-Ebene. [Es ist $\partial(t, r)/\partial(\varrho, \zeta) = \varrho \cdot (\zeta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$; die Eineindeutigkeit der durch (17) vermittelten Abbildung ist demnach für $\varrho = 0$ und $\zeta = 1$ (bzw. $t - r = 0$ und $r = 0$) gestört.] Führt man in (16) an Stelle von t und r die Größen ϱ und ζ ein und ersetzt die Integrationsveränderliche τ durch $\cosh\sigma$, so ergibt sich

$$u^{(k)}\left(\varrho\zeta, \varrho\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = \varrho^n \int_0^{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\cosh\sigma\right)^n \cosh k\sigma \, d\sigma.$$

Nun ist aber (vgl. [2], S. 259, Formel 118)

$$(-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\cosh\sigma\right)^n \cosh k\sigma \, d\sigma = Q_n^k(\zeta).$$

Daraus ergibt sich, wenn man für ϱ und ζ wieder t und r einführt, $\cosh\sigma = \tau$ setzt und beachtet, daß $T_k(\cosh\sigma) = \cosh k\sigma$ ist,

$$(t^2 - r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right) = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} (t - r\tau)^n \, d\tau,$$

also die Behauptung aus Satz 5, denn in dem bisher ausgeschlossenen Fall $t = r > 0$ verschwinden die rechte und die linke Seite dieser Gleichung.

Der Vollständigkeit wegen fügen wir das folgende Ergebnis an:

Satz 6. *Es sei μ beliebig komplex, ν komplex mit $\mathrm{Re}(\nu+1) > 0$ und mit $-\pi \leqq \arg \sigma < \pi$*

$$T_\mu(\sigma) = \tfrac{1}{2}\left[(\sigma + \sqrt{\sigma^2-1})^\mu + (\sigma - \sqrt{\sigma^2-1})^\mu\right]$$

durch Beschränkung von $(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2-1})^\mu$ auf seinen Hauptwert eindeutig erklärt. Ferner sei für komplexes ζ und reelles $t \geqq -1$

$$\zeta - t = r e^{i\beta} \quad \text{mit} \quad -\pi < \beta < \pi,$$

wo β den Winkel bezeichnet, den die Gerade durch ζ und t mit der Richtung der positiven reellen Achse der ζ-Ebene einschließt. Endlich sei Z die von $+1$ über -1 längs der negativen reellen Achse nach ∞ aufgeschnittene ζ-Ebene. Dann ist für $\zeta \in Z$

$$Q_\nu^\mu(\zeta) = e^{\mu\pi i}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int\limits_{\mathfrak{C}(0,\,\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})} T_\mu\left(\frac{\zeta-\sigma}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right) \frac{\sigma^\nu}{\sqrt{\sigma^2-2\zeta\sigma+1}}\,d\sigma,$$

wo $\mathfrak{C}\left(0, \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)$ ein beliebiger, die Punkte 0 und $\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ verbindender Weg in der von den Punkten $\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}$, $\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ und 0 nach ∞ aufgeschnittenen σ-Ebene ist.

Beweis. Das auf S. 349 angeführte Zitat besagt, daß bei geeigneter Wahl des Integrationsweges

$$Q_\nu^\mu(\zeta) = e^{\mu\pi i}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\cosh\sigma)^\nu \cosh\mu\sigma\,d\sigma \tag{18}$$

ist. Wir beschränken $\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ auf seinen Hauptwert und wählen den Integrationsweg $\mathfrak{C}'$ so, daß er erstens ganz in dem Streifen

$$\Sigma := \{\sigma : -\infty < \mathrm{Re}(\sigma) < +\infty,\ 0 \leqq \mathrm{Im}(\sigma) < 2\pi\}$$

verläuft, zweitens die Strecke $\{\sigma : \mathrm{Re}(\sigma) = 0,\ 0 \leqq \mathrm{Im}(\sigma) < 2\pi\}$ nicht überschreitet und sie im Falle $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) = 0$ (und zwar nur dann) in genau zwei Punkten trifft. Unter der Substitution

$$S_1: \quad \cosh\sigma = \tau,\ \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}} \tag{19}$$

geht Σ über in die bei -1 und $+1$ verzweigte zweiblättrige Riemannsche Fläche, auf der $\sqrt{\tau^2-1}$ eindeutig ist. Bei der getroffenen Wahl des Integrationsweges können wir uns auf die Betrachtung eines Blattes, also der τ-Ebene, beschränken. Schließen wir die Punkte $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = +1$, $\tau_3 = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$, $\tau_4 = \infty$ aus dieser Ebene aus und schneiden sie von den Punkten τ_j $(j = 1,2,3)$ nach ∞ auf, so ist nach Festlegung des arcus von τ und Beschränkung von

$(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau)^\nu$ sowie $(\tau \pm \sqrt{\tau^2-1})^\mu$ auf ihre Hauptwerte der Integrand des aus (18) unter (19) hervorgehenden Integrals

$$\int_{S_1(\mathfrak{C}')} (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau)^\nu T_\mu(\tau)\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}$$

in der so aufgeschnittenen τ-Ebene T eindeutig und regulär. Unter (19) wird $\sigma = 0$ in $\tau = 1$ und $\sigma = \frac{1}{2}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ in $\tau = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$ abgebildet. Demnach ist für jeden die Punkte $\tau = 1$ und $\tau = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$ verbindenden und in T verlaufenden Weg $\mathfrak{C}''$

$$e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int_1^{\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}} (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau)^\nu T_\mu(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} = Q_\nu^\mu(\zeta). \tag{20}$$

Die lineare Abbildung

$$S_2\colon\quad \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\,\tau = v, \qquad \frac{d\tau}{dv} = -\sqrt{\zeta^2-1} \tag{21}$$

überführt die singulären Stellen τ_j $(j = 1, 2, 3)$ der τ-Ebene bzw. in die Punkte $v_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2-1}$, $v_2 = \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$, $v_3 = 0$, $v_4 = \infty$ der v-Ebene. Wir schließen diese Punkte aus der v-Ebene aus und legen wie zuvor von v_j $(j = 1, 2, 3)$ einen Schnitt nach ∞. Unter den gleichen Festsetzungen wie zuvor ist der Integrand des aus (20) unter (21) hervorgehenden Integrals

$$\int_{S_2(\mathfrak{C}'')} T_\mu\left(\frac{\zeta - v}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\frac{v^\nu}{\sqrt{v^2 - 2\zeta v + 1}}\,dv$$

in der so aufgeschnittenen v-Ebene Y eindeutig und regulär. Da unter (21) $\tau = 1$ in $v = \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ und $\tau = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}$ in $v = 0$ übergeht, so ist mit $\zeta \in Z$

$$e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int_{\mathfrak{C}(0,\,\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})} T_\mu\left(\frac{\zeta - v}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\frac{v^\nu}{\sqrt{v^2 - 2\zeta v + 1}}\,dv = Q_\nu^\mu(\zeta)$$

für jeden Weg, der $v = 0$ mit $v = \zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$ verbindet und ganz in Y verläuft, was behauptet wurde.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den

Satz 7. *Die (reelle) Funktion f_k besitze im Intervall $[0, \Lambda[$ die Entwicklung*

$$f_k(\lambda) = a_{k1}\lambda + a_{k2}\lambda^2 + \cdots$$

und es sei für $t - r \geqq 0$, $r > 0$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$u^{(k)}(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\, f_k(t - r\tau)\,d\tau.$$

Dann gestattet $u^{(k)}(t,r)$ *die in dem Streifen* $\{(t,r): 0 \leq t-r<\Lambda,\ r>0\}$ *konvergente Entwicklung*

$$u^{(k)}(t,r) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!}\, a_{kn}(t^2-r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\right).$$

Beweis. Für den Beweis dieses Satzes ist es unzweckmäßig, von der Formel (9) auszugehen, da dort $u^{(k)}(t,r)$ durch ein uneigentliches Integral dargestellt wird, was bei einer im folgenden vorzunehmenden Vertauschung von Grenzübergängen lästig wäre. Wir nehmen daher in dem Integral aus Satz 7 die Substitution $\tau = \cosh\sigma$ vor und erhalten

$$u^{(k)}(t,r) = \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\, f_k(t-r\tau)\, d\tau = \int_0^{\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}} f_k(t-r\cosh\sigma)\cosh k\sigma\, d\sigma.$$

Da $\left(f_k = \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\lambda^n$ mit $\varepsilon>0$ in $[0, \Lambda-\varepsilon]$ gleichmäßig konvergiert, so konvergiert auch

$$\left(f_k(t-r\cosh\sigma) = \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}(t-r\cosh\sigma)^n$$

bei beliebigem aber festem $(t,r) \in \{(t,r): 0 \leq t-r \leq \Lambda-\varepsilon,\ r>0\}$ gleichmäßig für alle Werte $\cosh\sigma$, für welche σ im Integrationsintervall $\left[0,\ \operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right]$ liegt. Deshalb können wir auf der rechten Seite der Gleichung

$$\int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma \cdot f_k(t-r\cosh\sigma)\, d\sigma = \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}(t-r\cosh\sigma)^n\, d\sigma$$

die Integration gliedweise ausführen und erhalten

$$u^{(k)}(t,r) = \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} \cosh k\sigma \cdot f_k(t-r\cosh\sigma)\, d\sigma$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \int_0^{\left|\operatorname{ar\,cosh}\frac{t}{r}\right|} (t-r\cosh\sigma)^n \cosh k\sigma\, d\sigma,$$

oder nach Ausführung der Substitution $\cosh\sigma = \tau$

$$u^{(k)}(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,(t-r\tau)^n\, d\tau. \tag{22}$$

Nach Satz 5 ist aber

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,(t-r\tau)^n\, d\tau = (-1)^k \frac{n!}{(n+k)!}\,(t^2-r^2)^{n/2}\, Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\right).$$

Setzt man den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung in (22) ein, so ergibt sich die für beliebige $(t, r) \in \{(t, r): 0 \leqq t - r < A, r > 0\}$ konvergente Entwicklung

$$u^{(k)}(t, r) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} a_{kn} (t^2 - r^2)^{n/2} Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right),$$

deren Existenz in Satz 7 behauptet wurde[3]).

Wir schließen hier eine Bemerkung an: Hätte man die Aufgabe (4), (5) mittels des formalen — durch die Sätze 1 und 7 jedoch gerechtfertigten — Ansatzes

$$u^{(k)}(\varrho\,\zeta, \varrho\sqrt{\zeta^2 - 1}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} \varrho^n Q_n^k(\zeta)$$

zu lösen versucht, so hätte sich nach dem Vorstehenden

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t, r) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} (t^2 - r^2)^{n/2} Q_n^k\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right) \\ &= (-1)^k k! \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} b_{kn} (t - r\tau)^n \, d\tau \end{aligned}$$

ergeben. Setzt man $b_{kn} = c_{k, n+k}$, so ist dann mit $g_k(\lambda) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} \lambda^n$ wegen

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} g_k(\lambda) \left(= g_k^{(k)}(\lambda)\right) = k! \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} c_{k, n+k} \lambda^n:$$

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t, r) &= (-1)^k k! \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} c_{k, n+k} (t - r\tau)^n \, d\tau \\ &= (-1)^k \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} g_k^{(k)}(t - r\tau) \, d\tau, \end{aligned}$$

d.h. *die zu $u^{(k)}$ gehörigen Dichtefunktionen $f_k (= g_k^{(k)})$ stellen sich als k-te Ableitungen dar.*

§ 4. Zur Konvergenz der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(t, r) \cdot (a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega)$

Die Voraussetzungen über die in den Ausdrücken (6) bzw. (9) auftretenden Funktionen f_k bzw. f waren verhältnismäßig lose. Stellt man jedoch in dem Falle, in dem man Veranlassung hätte, unendlich viele nicht identisch verschwindende Funktionen $u^{(k)}$ zu betrachten, die Frage nach der Konvergenz

[3]) Wegen entsprechender Entwicklungen für $u_t^{(k)}$ und $u_r^{(k)}$ vgl. [6], S. 11, Formel (13), (14a), (14b). Um Übereinstimmung mit den hier benutzten Bezeichnungen zu erhalten, ist dort t für x und $u^{(k)}$ für $\psi^{(k)}$ zu lesen sowie $\alpha = 1$ zu setzen.

der Reihen

$$u(t,r,\omega) = u^{(0)}(t,r) + \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(t,r)\cos k\omega \quad [4]), \tag{23}$$

so zeigt sich, daß die f_k wesentlich schärferen Bedingungen genügen müssen. Bevor wir hierzu Aussagen machen, führen wir abermals neue Veränderliche ξ, η gemäß

$$\begin{cases} \dfrac{t}{r} + \sqrt{\left(\dfrac{t}{r}\right)^2 - 1} = e^{\xi}, & t = \dfrac{\eta\cosh\xi}{\cosh\xi - 1} \\ t - r = \eta, & r = \dfrac{\eta}{\cosh\xi - 1} \end{cases} \tag{24}$$

ein, wodurch eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Gebietes $\{(t,r): 0<t-r<\infty,\ 0<r<\infty\}$ der (t,r)-Ebene auf das Gebiet $\{(\xi,\eta): 0<\xi<\infty,\ 0<\eta<\infty\}$ der (ξ,η)-Ebene erklärt ist. Mit

$$w^{(k)}(\xi,\eta) := u^{(k)}\left(\frac{\eta\cosh\xi}{\cosh\xi-1}, \frac{\eta}{\cosh\xi-1}\right)$$

ist dann

$$w^{(k)}(\xi,\eta) = \int_1^{\cosh\xi} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k\left(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}\cdot(\cosh\xi-\tau)\right) d\tau \qquad (\xi>0,\ \eta>0), \tag{25}$$

und die rechte Seite der Gl. (23) ist zu ersetzen durch

$$w^{(0)}(\xi,\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(\xi,\eta)\cos k\omega \qquad \left(\sim w(\xi,\eta,\omega)\right). \tag{23'}$$

Wir formulieren nunmehr den

Satz 8. *Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der mit dem Ausdruck* (25) *— in dem die Funktionen f_k die gleichen Forderungen zu erfüllen haben wie das f aus Satz 1 — gebildeten Reihe* (23') *bei festem $\xi=\xi'>0$, festem $\eta=\eta'>0$ und alle ω besteht in der Möglichkeit, zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein $k=k'$ so aufzufinden, daß*

$$|f_k(\theta_k(\cosh\xi')\cdot\eta')| < \varepsilon\frac{k}{\sinh k\xi'}, \qquad (0<\theta_k<1)$$

für jedes $k\geq k'$ ausfällt. (Dann darf (23') *jedenfalls als — möglicherweise nicht für alle angegebenen Wertetripel (ξ,η,ω) konvergente — Fouriersche Reihe für eine Funktion $w(\xi,\eta,\omega)$ angesehen werden.)*

Beweis. Nach Satz 1 kann man für (23) schreiben

$$u(t,r,\omega) = \int_1^{t/r} \frac{f_0(t-r\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\cos k\omega \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\, f_k(t-r\tau)\,d\tau.$$

[4]) Der einfacheren Schreibweise wegen beschränken wir uns hier und im folgenden auf die Betrachtung der cosinus-Reihe. Alle weiteren Überlegungen gelten ebenso für die sinus-Reihe und da unsere späteren Voraussetzungen die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (3) sichern, auch für die allgemeine Fourier-Reihe (3).

Da $T_k(\tau)/\sqrt{\tau^2-1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ für $\tau>1$ von positivem Vorzeichen und jedes der f_k stetig ist, so ergibt der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung — den wir auch für das nachfolgende uneigentliche Integral heranziehen können —

$$\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau = f_k\left(\theta_k\left(\frac{t}{r}\right)\cdot(t-r)\right)\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}}\,d\tau$$

mit $0<\theta_k\left(\frac{t}{r}\right)<1$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Unter Beachtung von (14) erhält man daraus

$$(26)\quad \begin{cases} u(t,r,\omega) \sim f_0\left(\theta_0\left(\frac{t}{r}\right)\cdot(t-r)\right)\log\left(\frac{t}{r}+\sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2-1}\right)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} f_k\left(\theta_k\left(\frac{t}{r}\right)\cdot(t-r)\right)\cdot\left[\left(\frac{t}{r}+\sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2-1}\right)^k-\left(\frac{t}{r}+\sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^2-1}\right)^{-k}\right]\cos k\omega. \end{cases}$$

Nach Einführung der unabhängigen Veränderlichen ξ, η gemäß (24) ergibt sich hieraus

$$(26')\quad \begin{cases} w(\xi,\eta,\omega) \sim f_0\left(\theta_0(\cosh\xi)\cdot\eta\right)\cdot\xi + \\ \qquad +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} f_k\left(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\right)\cdot\sinh k\xi\cdot\cos k\omega \quad (\xi\geqq 0,\ \eta\geqq 0). \end{cases}$$

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der rechts stehenden Reihe — die wir als Fouriersche Reihe anzusehen haben — bei festem ξ und festem η ist

$$(27)\qquad \frac{1}{k} f_k\left(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\right)\sinh k\xi \to 0 \qquad (k\to\infty),$$

denn die Koeffizienten einer solchen Reihe bilden stets Nullfolgen. Die präzise Fassung dieser Bedingung ist in Satz 8 angegeben, der damit bewiesen ist.

Natürlich ist es sehr einfach, *irgendein* hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe (26′) anzugeben. Wir begnügen uns damit, die folgende Bedingung zu formulieren:

Satz 9. *Ist bei festen* $\xi=\xi'>0$ *und* $\eta=\eta'>0$ *für alle* $k\geqq k'$ $(k'$ *fest)*

$$\max_{0\leqq\eta\leqq\eta'}|f_k(\eta)|\leqq\frac{1}{k^2+\delta\sinh k\xi'} \qquad (\delta>0),$$

so konvergiert die Reihe (26′) *für jedes* $(\xi,\eta)\in\{(\xi,\eta): 0\leqq\xi\leqq\xi',\ 0\leqq\eta\leqq\eta'\}$ *und alle* ω *absolut und gleichmäßig und stellt eine nach* ω *zweimal differentiierbare Funktion dar.*

Beweis. Da θ_k für jedes $k=0, 1, 2, \ldots$ im Inneren des Intervalls $[0, 1]$ liegt, so ist zunächst für $\eta\in[0,\eta']$

$$|f_k(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta)|\leqq\max_{0\leqq\eta\leqq\eta'}|f(\eta)|.$$

Weiterhin wächst $\sinh k\xi$ monoton mit ξ, woraus für $\xi<\xi'$

$$\max_{0\leqq\eta\leqq\eta'}|f_k(\eta)|\sinh k\xi<\max_{0\leqq\eta\leqq\eta'}|f_k(\eta)|\sinh k\xi'$$

folgt. Ist nun für $k \geq k'$ und $\delta > 0$

$$\max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \sinh k\xi' \leq \frac{1}{k^{2+\delta}},$$

so konvergiert nicht nur

$$F(\xi, \eta', \omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \frac{\sinh k\xi}{k} \cdot \cos k\omega,$$

sondern auch

$$\frac{\partial}{\partial \omega} F(\xi, \eta', \omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \sinh k\xi \cdot \sin k\omega$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} F(\xi, \eta', \omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \max_{0 \leq \eta \leq \eta'} |f_k(\eta)| \sinh k\xi \cos k\omega$$

für jedes $\xi \in [0, \xi']$ und alle ω absolut und gleichmäßig. Diese drei Reihen sind aber Majoranten für die Reihe (26′) und deren erste und zweite partielle Ableitung nach ω. Damit ist der Satz bewiesen.

Um behaupten zu können, daß wir in (26) bereits eine Lösung der eingangs formulierten Aufgabe vor uns haben, müssen wir jedoch die in Satz 9 angegebene Bedingung für f_k etwas verschärfen.

§ 5. Die Existenz nichttrivialer Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems von (1)

Die Existenz von Lösungen

$$u(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} f_k(t - r\tau)\, d\tau \tag{28}$$

unserer ursprünglichen Aufgabe ist bereits durch Satz 1 gesichert. Denn nehmen wir in (28) nur endlich viele der f_k als von null verschieden an, so treten für

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u &:= u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} u_{\omega\omega} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \cos k\omega \cdot \left\{ \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \left[(1 - \tau^2) f_k''(t - r\tau) + \frac{\tau}{r} f_k'(t - r\tau) + \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. + \frac{k^2}{r^2} f_k(t - r\tau) \right] d\tau - \frac{1}{r^2} \sqrt{t^2 - r^2}\, T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_k'(0) \right\} \end{aligned} \right. \tag{29}$$

Konvergenzfragen nicht auf. Da nach dem Beweis des Satzes 1 jeder der Ausdrücke in den geschweiften Klammern aus (29) verschwindet, so annulliert

$u(t, r, \omega)$ die linke Seite von (29). Ebenso sind die Anfangsbedingungen $u=0$, $u_t=0$, $u_r=0$, $u_\omega=0$ für $t=r>0$ erfüllt, was für u, u_t und u_r sofort aus Satz 1 und (28), für u_ω aus

$$u_\omega = -\sum_{k=1}^{\infty} k \sin k\omega \cdot u^{(k)}(t, r)$$

und Satz 1 folgt.

Wir beweisen jetzt ein entsprechendes Ergebnis für den Fall, in dem unendlich viele der f_k von null verschieden sind.

Satz 10. *Es sei f_k nicht identisch null und zweimal stetig differentiierbar. $f_k^{(l)}$ bezeichne die l-te Ableitung von f_k. Ferner gebe es reelle Zahlen $\xi'>0$ und $\eta'>0$ sowie eine natürliche Zahl k' so, daß bei beliebigem festem $\delta>0$*

$$\max_{0\le\eta\le\eta'} |f_k^{(l)}(\eta)| \le \frac{1}{(k+l)^{2-l+\delta}\sinh(k+l)\,\xi'} \qquad (l=0,1,2)$$

für jedes $k\ge k'$ ausfällt. Dann konvergiert (28) *absolut und gleichmäßig für alle $(t, r)\in\{(t, r): 1\le\frac{t}{r}\le\cosh\xi',\ 0\le t-r\le\eta'\}$ und alle ω und stellt eine nicht identisch verschwindende Lösung der Aufgabe*

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u_{\omega\omega} = 0$$

mit

$$u=0, \quad u_t=0, \quad u_r=0, \quad u_\omega=0 \quad \text{für} \quad t-r=0,\ r>0$$

dar. Falls für mindestens ein k $f_k'(0)\neq 0$ ist, bleiben u_{tt} und u_{rr} für $\frac{t}{r}\downarrow 1$ nicht beschränkt.

Beweis. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß die Voraussetzungen aus Satz 10 die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (28) und der aus ihr durch gliedweise Differentiation hervorgehenden Reihen

$$u_r(t, r, \omega) = -\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{\tau T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'(t-r\tau)\,d\tau$$

$$u_{tt}(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \left(\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''(t-r\tau)\,d\tau + \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f_k'(0) \right)$$

$$u_{rr}(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \left(\int_1^{t/r} \frac{\tau^2 T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''(t-r\tau)\,d\tau + \left(\frac{t}{r}\right)^2 \frac{T_k\left(\frac{t}{r}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}} f_k'(0) \right)$$

$$u_{\omega\omega}(t, r, \omega) = -\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos k\omega \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau,$$

in denen f_k'' jetzt als stetig angenommen wird, sichern. Für die hierin auftretenden Integrale liefert der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung nach Ausführung der Substitution (24) und mit $0<\theta_k, \tilde{\theta}_k, \tilde{\tilde{\theta}}_k<1$ sowie $k=1, 2, \ldots$

$$
(30)\quad \begin{cases}
A_1 := \displaystyle\int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau = \int_0^{\cosh\xi} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k\Big(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}(\cosh\xi-\tau)\Big)\,d\tau \\
\quad = f_k\big(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\,\dfrac{\sinh k\xi}{k} \\
A_2 := \displaystyle\int_1^{t/r} \frac{\tau\,T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'(t-r\tau)\,d\tau = \int_0^{\cosh\xi} \frac{\tau\,T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'\Big(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}(\cosh\xi-\tau)\Big)\,d\tau \\
\quad = \dfrac{1}{2} f_k'\big(\tilde{\theta}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\Big[\dfrac{\sinh(k-1)\xi}{k-1}+\dfrac{\sinh(k+1)\xi}{k+1}\Big] \\
A_3 := \displaystyle\int_1^{t/r} \frac{\tau^2 T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''(t-r\tau)\,d\tau = \int_0^{\cosh\xi} \frac{\tau^2 T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k''\Big(\frac{\eta}{\cosh\xi-1}(\cosh\xi-\tau)\Big)\,d\tau \\
\quad = \dfrac{1}{4} f_k''\big(\tilde{\tilde{\theta}}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\Big[\dfrac{\sinh(k-2)\xi}{k-2}+2\dfrac{\sinh k\xi}{k}+\dfrac{\sinh(k+2)\xi}{k+2}\Big].
\end{cases}
$$

Demnach ist für $\xi\geqq 0$ und $k=1, 2, \ldots$

$$
\begin{aligned}
|A_1| &< \big|f_k\big(\theta_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\big|\,\frac{\sinh k\xi}{k} \\
|A_2| &< \big|f_k'\big(\tilde{\theta}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\big|\,\frac{\sinh(k+1)\xi}{k+1} \\
|A_3| &< \big|f_k''\big(\tilde{\tilde{\theta}}_k(\cosh\xi)\cdot\eta\big)\big|\,\frac{\sinh(k+2)\xi}{k+2}.
\end{aligned}
$$

Gibt es nun reelle Zahlen $\xi'>0$ und $\eta'>0$ sowie eine natürliche Zahl k' so, daß bei beliebigem festem $\delta>0$ für jedes $k\geqq k'$

$$
(31)\qquad \max_{0\leq\eta\leq\eta'} |f_k^{(l)}(\eta)|\sinh(k+l)\xi' \leq \frac{1}{(k+l)^{2-l+\delta}} \qquad (l=0, 1, 2)
$$

gilt, so konvergieren zunächst die (auf die Veränderlichen ξ, η umgeschriebenen) Reihen für u, u_r,

$$
u_t(t, r, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k'(t-r\tau)\,d\tau
$$

und

$$
u_\omega(t, r, \omega) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\omega \cdot \int_1^{t/r} \frac{T_k(\tau)}{\sqrt{\tau^2-1}} f_k(t-r\tau)\,d\tau
$$

absolut und gleichmäßig für $(\xi, \eta)\in\{(\xi, \eta): 0\leq\xi\leq\xi', 0\leq\eta\leq\eta'\}$ und alle ω, denn ihre Koeffizienten werden nach (30) und (31) durch die Glieder der

konvergenten Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+l)^{2-l+\delta}} \qquad (l=0,1)$$

majorisiert. Demnach konvergieren die Reihen für u, u_t, u_r und u_ω absolut und gleichmäßig für alle $(t,r) \in \{(t,r): 1 \leqq \frac{t}{r} \leqq \cosh \xi',\ 0 \leqq t-r \leqq \eta'\}$ und alle ω. Entsprechend wäre die absolute und gleichmäßige Konvergenz der *sämtlichen* zweiten partiellen Ableitungen von u für die angegebenen (ξ, η, ω) gesichert, wenn wir die Konvergenz der in ihnen auftretenden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k\left(\frac{t}{r}\right) f_k'(0) \cos k\omega = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(0) \cosh k\xi \cos k\omega$$

aus (31) folgern könnten. Das ist mit der Einschränkung $\xi > 0$ tatsächlich der Fall, wie die folgenden Betrachtungen zeigen: Wir wählen ein festes $\xi = \tilde{\xi} > 0$ und bestimmen die natürliche Zahl $\tilde{k}(\tilde{\xi})$ so, daß

$$\tilde{k} > \frac{1}{\tilde{\xi}} \log \frac{2}{e^{\tilde{\xi}} - 1} \tag{32}$$

ausfällt. Dann ist für $\xi > \tilde{\xi}$ ebenfalls $\tilde{k} > \frac{1}{\xi} \log \frac{2}{e^{\xi} - 1}$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt aus (32)

$$e^{\tilde{k}\xi} > \frac{2}{e^{\xi} - 1} \qquad (\xi > \tilde{\xi}),$$

wofür wir

$$e^{(\tilde{k}+1)\xi} - e^{\tilde{k}\xi} > 2$$

oder

$$e^{(\tilde{k}+1)\xi} - 1 > e^{\tilde{k}\xi} + 1 \tag{33}$$

schreiben können. Nun ist einerseits mit $\xi > 0$

$$e^{(\tilde{k}+1)\xi} - 1 < e^{(\tilde{k}+1)\xi} - e^{-(\tilde{k}+1)\xi},$$

andrerseits

$$e^{\tilde{k}\xi} + 1 > e^{\tilde{k}\xi} + e^{-\tilde{k}\xi}.$$

Demnach ergibt sich aus (33) bei der von uns getroffenen Wahl von $\tilde{k}$

$$\cosh \tilde{k}\xi < \sinh(\tilde{k}+1)\xi \qquad (\xi > \tilde{\xi}).$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion nach l, daß hieraus

$$\cosh(\tilde{k}+l)\xi < \sinh(\tilde{k}+l+1)\xi \qquad (l=1,2,\ldots) \quad (\xi > \tilde{\xi})$$

folgt. Als Induktionsvoraussetzung benutzen wir

$$\cosh(\tilde{k}+l-1)\xi < \sinh(\tilde{k}+l)\xi.$$

Danach ist

$$\cosh(\tilde{k}+l-1)\,\xi\cosh\xi<\sinh(\tilde{k}+l)\,\xi\cosh\xi. \tag{34}$$

Aus

$$\sinh(k+l-1)\,\xi<\sinh(k+l)\,\xi<\cosh(k+l)\,\xi$$

ergibt sich

$$\sinh(k+l-1)\,\xi\sinh\xi<\cosh(k+l)\,\xi\sinh\xi. \tag{35}$$

Addition von (34) und (35) liefert

$$\cosh(\tilde{k}+l-1)\,\xi\cosh\xi+\sinh(\tilde{k}+l-1)\,\xi\sinh\xi<\sinh(\tilde{k}+l)\,\xi\cosh\xi+$$
$$+\cosh(\tilde{k}+l)\,\xi\sinh\xi.$$

Nach den Additionstheoremen für die hyperbolischen Funktionen ist diese Ungleichung identisch mit der Behauptung.

Wir wissen nun, daß mit $\xi\geqq\tilde{\xi}>0$ für jedes $k\geqq\tilde{k}$

$$|f_k'(0)|\cosh k\xi<|f_k'(0)|\sinh(k+1)\,\xi$$

ist. Da daraus wegen (31) mit $\delta>0$

$$|f_k'(0)|\cosh k\xi<\frac{1}{(k+1)^{1+\delta}}\qquad\text{für jedes } k\geqq\tilde{k}$$

folgt, so konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k'(0)|\cosh k\xi\cos k\omega$$

absolut und gleichmäßig für alle $\xi\geqq\tilde{\xi}>0$ und alle ω. Da $\tilde{\xi}>0$ beliebig gewählt werden durfte, so können wir $0<\tilde{\xi}<\xi'$ nehmen und sind jetzt sicher, daß für $(\xi,\eta)\in\{(\xi,\eta)\colon\tilde{\xi}\leqq\xi\leqq\xi',\ 0\leqq\eta\leqq\eta'\}$ und alle ω bzw. für $(t,r)\in\left\{(t,r)\colon\cosh\tilde{\xi}\leqq\frac{t}{r}\leqq\cosh\xi,\ 0\leqq t-r\leqq\eta'\right\}$ und alle ω die Umordnung der Reihen für u_r, u_{tt}, u_{rr}, $u_{\omega\omega}$ zu (29) legitim ist. Wegen Satz 1 verschwindet jeder der Ausdrücke in den geschweiften Klammern aus (29). Somit genügt u, dessen Darstellung durch (28) sogar für alle $(t,r)\in\left\{(t,r)\colon 1\leqq\frac{t}{r}\leqq\cosh\xi',\ 0\leqq t-r\leqq\eta'\right\}$ und alle ω konvergiert, der Gleichung $\Delta u=0$. Da nach Satz 1 für $t=r>0$ $u^{(k)}=0$, $u_t^{(k)}=0$, $u_r^{(k)}=0$ ist, so gilt für $t=r>0$ und alle ω auch

$$u_t(t,r,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}u_t^{(k)}(t,r)\cos k\omega=0$$

$$u_r(t,r,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}u_r^{(k)}(t,r)\cos k\omega=0$$

$$u_\omega(t,r,\omega)=-\sum_{k=1}^{\infty}k\,u^{(k)}(t,r)\sin k\omega=0,$$

d.h. die Anfangsbedingungen sind ebenfalls erfüllt. Schließlich können, wenn mindestens ein $f_k'(0) \neq 0$ ist, u_{tt} und u_{rr} für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ nicht beschränkt bleiben, da dann nach (10c) bzw. (10d) mindestens eines der in ihren Reihenentwicklungen auftretenden Glieder über alle Grenzen wächst. Der Satz ist damit bewiesen.

Literatur

[1] Courant, R., u. D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 2. Berlin 1937. — [2] Hobson, E. W.: The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge 1931. — [3] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [4] Lense, J.: Kugelfunktionen. Leipzig 1950. — [5] Sauer, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik. Berlin 1951. — [6] Suschowk, D.: Mitt. a. d. Math. Inst. d. TH München Nr. DFG 21, München 1956.

Math. Institut der Technischen Hochschule München

(Eingegangen am 25. Mai 1957)

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 362–366 (1958)

Über die Darstellung der positiven Funktionale

Von
IVAN VIDAV

Sei $\mathfrak{B}$ eine lineare komplexe Algebra mit Einheitselement 1 in der eine Involution definiert ist, d.h. eine solche Abbildung $x \to x^*$ von $\mathfrak{B}$ auf sich selbst, die folgenden Bedingungen genügt: a) $x^{**} = x$, b) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$, c) $(xy)^* = y^* x^*$. Ein Element u, für das $u^* = u$ gilt, werden wir symmetrisch nennen. Jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ kann man dann in der Form $x = u + iv$ schreiben, wo u und v symmetrisch sind. Ein lineares Funktional $f(x)$ in $\mathfrak{B}$ heißt positiv, wenn $f(x^* x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathfrak{B}$ gilt. Bekanntlich ist $f(1) > 0$, wenn nicht $f(x) \equiv 0$ ist. Es soll hier stets $f(1) = 1$ angenommen werden. Ein positives Funktional $f(x)$ heißt unzerlegbar, wenn aus $f(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)$, $0 < \alpha < 1$, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ positive Funktionale bedeuten, stets $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f(x)$ folgt.

Betrachten wir nun die Algebra $\mathfrak{B}$, die durch zwei symmetrische Elemente p und q erzeugt wird. Zwischen diesen Elementen bestehe die Vertauschungsrelation

$$pq - qp = -i, \qquad i^2 = -1. \tag{1}$$

Daraus folgt, daß sich jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig in der Form

$$x = \sum \alpha_{kl} p^k q^l, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

schreiben läßt, wobei α_{kl} komplexe Zahlen bedeuten. Das adjungierte Element x^* ist dann

$$x^* = \sum \bar{\alpha}_{kl} q^l p^k = \sum \beta_{kl} p^k q^l.$$

Die Algebra $\mathfrak{B}$ besteht hier aus allen Polynomen (2).

Wird $p + iq = a \,|\, 2$, $p - iq = a^* \,|\, 2$ gesetzt, dann lautet die Relation (1)

$$a^* a - a a^* = 1. \tag{3}$$

Daß in dieser Algebra positive Funktionale existieren, erkennt man so: Sei $\psi(q)$ eine solche unendlich oft differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen q, $-\infty < q < \infty$, für die bei beliebigen natürlichen Zahlen k und l das Produkt $|q^k \psi^{(l)}(q)|$ gegen Null strebt, wenn $|q| \to \infty$. Ordnen wir nun dem Elemente p den Differentiationsoperator $\frac{1}{i}\frac{d}{dq}$, dem Elemente q aber den Multiplikationsoperator q zu. Dann bestimmt jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig einen Differentialoperator X, nämlich

$$X = \sum \alpha_{kl} \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dq}\right)^k q^l \tag{2*}$$

für das Element (2). Wird nun

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X\,\psi(q)\,\overline{\psi(q)}\,dq \tag{4}$$

gesetzt, so ist, wie man leicht bestätigt, $f(x)$ ein positives Funktional.

Nun erhebt sich die folgende Frage: Wann läßt sich ein positives Funktional $f(x)$ in der Form (4) schreiben? Eine teilweise Antwort auf diese Frage ist, wie hier gezeigt werden soll, in den Arbeiten von PUTNAM [3] und RELLICH [2] enthalten.

Betrachten wir also ein positives Funktional $f(x)$ mit $f(1)=1$. Diejenigen Elemente $x\in\mathfrak{B}$, für die $f(x^*x)=0$ gilt, bilden ein linksseitiges Ideal $\mathfrak{N}$. Die Restklassen mod $\mathfrak{N}$ bilden einen linearen Vektorraum $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$. Sei $\xi=\{x+\mathfrak{N}\}$ diejenige Restklasse, die das Element x enthält. Wird hier das innere Produkt

$$(\xi,\eta)=f(y^*x),\qquad \xi=\{x+\mathfrak{N}\},\qquad \eta=\{y+\mathfrak{N}\} \tag{5}$$

eingeführt, so wird $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ zu einem Hilbertschen Raum, der offenbar separabel, aber nicht notwendig vollständig ist. Sei $\mathfrak{H}$ der Hilbertsche Raum, der aus $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ durch Vervollständigung entsteht.

Jedes Element $x\in\mathfrak{B}$ läßt sich nun als ein linearer Operator A_x in $\mathfrak{H}$ auffassen: $A_x\xi_0$ bedeutet diejenige Restklasse mod $\mathfrak{N}$, die xx_0 enthält, also $A_x\{x_0+\mathfrak{N}\}=\{xx_0+\mathfrak{N}\}$. Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{A_x}$ von A_x ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$, also ist A_x in $\mathfrak{H}$ dicht definiert. Da nun

$$(A_{x^*}\xi_0,\eta_0)=f(y_0^*x^*x_0)=f[(xy_0)^*x_0]=(\xi_0,A_x\eta_0)$$

für alle $\xi_0,\eta_0\in\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ gilt, besitzt jedes A_x in $\mathfrak{H}$ eine Abschließung, die mit $\bar{A}_x$ bezeichnet werden soll. Nunmehr können wir folgenden Satz formulieren:

Ist in der oben beschriebenen Darstellung die Abschließung des Operators $A_{aa^*}=A_aA_{a^*}$ selbstadjungiert, dann gibt es eine solche Folge von unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\psi_k(q)$, $-\infty<q<\infty$, $k=1,2,\ldots,n$, $n\leqq\infty$, daß für jedes $x\in\mathfrak{B}$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} X\,\psi_k(q)\,\overline{\psi_k(q)}\,dq \tag{6}$$

gilt. Dabei bedeutet X den Differentialoperator, der dem Element x entspricht, d.h. den Operator (2).*

Bei dem Beweis bedienen wir uns des folgenden Hilfssatzes:

Seien A und B zwei dicht definierte Operatoren mit demselben Definitionsbereich $\mathfrak{D}$, die folgenden Bedingungen genügen:

1. *$A\xi$, $B\xi\in\mathfrak{D}$ für jedes $\xi\in\mathfrak{D}$.*
2. *$(A\xi,\eta)=(\xi,B\eta)$ für $\xi,\eta\in\mathfrak{D}$.*
3. *Die Abschließungen $(\overline{AB})$ und $(\overline{BA})$ sind selbstadjungiert.*

Dann ist $\overline{B}=(\bar{A})^*$ und $(\overline{AB})=\bar{A}\bar{B}$, $(\overline{BA})=\bar{B}\bar{A}$.

Hier bedeutet $\bar{A}$ die Abschließung von A, $\overline{B}$ die von B usw. Zunächst erkennt man aus 2., daß die Abschließungen $\bar{A}$ und $\overline{B}$ existieren. Da $(\overline{AB})$ und $(\overline{BA})$ positive selbstadjungierte Operatoren sind, liegen die Wertevorräte $(E+BA)\mathfrak{D}$ und $(E+AB)\mathfrak{D}$, wo E die identische Transformation bedeutet, in $\mathfrak{H}$ dicht. Sei nun $\boldsymbol{H}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ das kartesische Produkt des Raumes $\mathfrak{H}$ mit sich selbst. $\boldsymbol{H}$ besteht aus allen geordneten Paaren $\{\xi,\eta\}$, $\xi,\eta\in\mathfrak{H}$. Nun gilt die folgende Identität

$$\begin{aligned}&\{(E+BA)\xi,\ (E+AB)\eta\}\\&=\{\xi+B\eta, A(\xi+B\eta)\}+U\{i(\eta-A\xi),\ iB(\eta-A\xi)\},\end{aligned}$$

wobei ξ,η beliebige Vektoren aus $\mathfrak{D}$ sind, U ist aber der unitäre Operator: $U\{\xi,\eta\}=\{i\eta,-i\xi\}$. Durchlaufen ξ und η die Menge $\mathfrak{D}$, so liegt die zugehörige Menge der Vektoren $\{(E+BA)\xi,(E+AB)\eta\}$ in $\boldsymbol{H}$ dicht. Es ist also

$$\boldsymbol{H}=\overline{M(A)}\oplus U\overline{M(B)}.$$

Mit $M(A)$ und $M(B)$ haben wir die Graphen des Operators A und B bezeichnet. Da $\overline{M(A)}=M(\bar{A})$, folgt daraus

$$\boldsymbol{H}=M(\bar{A})\oplus UM(\overline{B}).$$

Damit haben wir gezeigt, daß $\overline{B}=(\bar{A})^*$ ist ([1], S. 102). Das Produkt $\overline{B}\bar{A}=(\bar{A})^*\bar{A}$ ist also selbstadjungiert. Da $(BA)\xi=\overline{B}\bar{A}\xi$ für $\xi\in\mathfrak{D}$ gilt und die Abschließung von BA nach Voraussetzung selbstadjungiert ist, hat man $(\overline{BA})=\overline{B}\bar{A}$.

Wir werden nun diesen Hilfssatz auf die Operatoren A_a und A_{a^*} anwenden, wobei $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ ist. Diese Operatoren genügen offenbar der Gleichung

$$A_{a^*}A_a-A_aA_{a^*}=E, \tag{7}$$

die der Relation (3) entspricht. Daraus erkennt man, daß die Abschließungen A_{aa^*} und A_{a^*a} denselben Definitionsbereich haben. Sie sind also nach Voraussetzung des Satzes beide selbstadjungiert. Aus dem Hilfssatz folgt nun

$$\bar{A}_{a^*}=(\bar{A}_a)^*,\quad (\overline{A_{a^*}A_a})=(\bar{A}_a)^*\bar{A}_a,\quad (\overline{A_aA_{a^*}})=\bar{A}_a(\bar{A}_a)^*.$$

Wird $\bar{A}_a=A$, also $\bar{A}_{a^*}=A^*$ gesetzt, so haben die selbstadjungierten Operatoren AA^* und A^*A denselben Definitionsbereich. Zwischen ihnen besteht die Relation

$$A^*A-AA^*=E. \tag{7*}$$

Nach einem Satz von PUTNAM [3] besitzt dann der Operator AA^* ein reines Punktspektrum, das aus allen nicht negativen ganzen Zahlen $\lambda=0,1,2,3,\ldots$ besteht.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}_k$ den Raum der Eigenlösungen des Operators AA^* für $\lambda=k$, d.h. die Menge der Lösungen der Gleichung $AA^*\xi=k\xi$. Die zueinander orthogonalen Räume $\mathfrak{L}_k$ haben die gleiche Dimension. Aus (7*) erkennt man nämlich, daß $A\mathfrak{L}_k\subset\mathfrak{L}_{k+1}$ und $A^*\mathfrak{L}_{k+1}\subset\mathfrak{L}_k$. Ferner ist $A\xi\neq 0$, wenn $\xi\in\mathfrak{L}_k$ und $A^*\xi\neq 0$ für $\xi\in\mathfrak{L}_{k+1}$ $(\xi\neq 0)$, was auch aus (7*) folgt.

Sei nun $\xi_0', \xi_0'', \ldots, \xi_0^{(n)}$, $n \leq \infty$, eine orthonormierte Basis im Unterraum $\mathfrak{L}_0$. Die Vektoren $\xi_k^{(l)} = A^k \xi_0^{(l)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, sind alle von Null verschieden und sie genügen den Gleichungen $AA^* \xi_k^{(l)} = k \xi_k^{(l)}$. Es ist ferner

$$(\xi_{k+1}^{(l)}, \xi_{k+1}^{(j)}) = (A \xi_k^{(l)}, A \xi_k^{(j)}) = (AA^* \xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}) + (\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}) = (k+1)(\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}).$$

Hieraus folgt $(\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(l)}) = k!$ und $(\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(j)}) = 0$ für $l \neq j$. Setzt man also $\eta_k^{(l)} = \xi_k^{(l)} / (\xi_k^{(l)}, \xi_k^{(l)})^{\frac{1}{2}}$, so bekommt man eine orthonormierte Basis $\eta_k', \eta_k'', \ldots, \eta_k^{(n)}$ für den Raum $\mathfrak{L}_k$. Eine leichte Rechnung gibt nun

$$A \eta_k^{(l)} = \eta_{k+1}^{(l)} \sqrt{k+1}. \tag{8}$$

Sei jetzt $\mathfrak{H}_l$ der Unterraum, den die Vektoren $\eta_0^{(l)}, \eta_1^{(l)}, \eta_2^{(l)}, \ldots$ aufspannen. Die Unterräume $\mathfrak{H}_l$ sind zueinander orthogonal und es ist

$$\mathfrak{H} = \sum_{l=1}^{l=n} \oplus \mathfrak{H}_l. \tag{9}$$

Die Wirkung des Operators A im Unterraum $\mathfrak{H}_l$ ist durch (8) vollständig bestimmt. Ferner ist

$$A^* \eta_{k+1}^{(l)} = \eta_k^{(l)} \sqrt{k+1}, \qquad A^* \eta_0^{(l)} = 0. \tag{8*}$$

Die Räume $\mathfrak{H}_l$ reduzieren also A und A^*.

Jedes $\mathfrak{H}_l$ ist unendlich dimensional und ist folglich dem Raume $L_2(-\infty, \infty)$ isomorph. Der Operator A ist aber in L_2 dem Differentialoperator $\frac{i}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq}\right)$ unitär äquivalent. Man überzeugt sich davon, wenn man in L_2 die orthonormierte Basis bestehend aus Hermiteschen Polynomen einführt. Daraus erkennt man, daß in L_2 der Operator A_p dem Differentiationsoperator $\frac{1}{i} \frac{d}{dq}$ und A_q dem Multiplikationsoperator q unitär äquivalent ist.

Sei nun $\varepsilon = \{1 + \mathfrak{N}\}$ die Restklasse, die das Einheitselement 1 enthält. $\varepsilon = \{1 + \mathfrak{N}\}$, als ein Vektor aus $\mathfrak{H}$ aufgefaßt, kann man infolge von (9) in der Form

$$\varepsilon = \sum_{l=1}^{l=n} \eta_l$$

schreiben, wo die Vektoren $\eta_l \in \mathfrak{H}_l$ zueinander orthogonal sind. Da $(A_x \varepsilon, \varepsilon) = f(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{B}$ ist und auch $A_x \eta_l$ zu $\mathfrak{H}_l$ gehört, folgt daraus

$$f(x) = \sum_{l=1}^{l=n} (A_x \eta_l, \eta_l).$$

Nun ist $\mathfrak{H}_l$ dem Raume $L_2(-\infty, \infty)$ isomorph, der Operator A_x ist aber dem Differentialoperator (2*) äquivalent. Folglich entspricht jedem η_l eine Funktion $\psi_l(q)$ aus $L_2(-\infty, \infty)$, so daß

$$(A_x \eta_l, \eta_l) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \psi_l(q) \overline{\psi_l(q)}\, dq$$

gilt. Die Funktionen $\psi_l(q)$ sind notwendig unendlich oft differenzierbar. Daraus ergibt sich

$$f(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} X \psi_l(q) \overline{\psi_l(q)}\, dq.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Ist im besonderen das Funktional $f(x)$ unzerlegbar, dann ist $n=1$. In diesem Falle hat man also die Darstellung

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \psi(q) \overline{\psi(q)}\, dq.$$

Für $n>1$ kann man nämlich das Funktional (6) zerlegen.

Literatur

[1] ACHIESER, N. I., u. I. M. GLASMAN: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Berlin 1954. — [2] RELLICH, F.: Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen. Göttinger Nachr. **1946**, 107—115. — [3] PUTNAM, C. R.: Remarks on certain operators of quantum field theory. J. London Math. Soc. **29**, 350—354 (1954).

Mathematisches Institut der Universität Ljubljana (Jugoslavien)

(Eingegangen am 5. Juni 1957)

Puppe, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 367—406 (1958)

Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I

Von

Dieter Puppe

Inhalt von Teil I und II[0])

Einleitung

§ 1. CSS-Komplexe und CSS-Gruppen

1.1. CSS-Komplexe 370
1.2. CSS-Gruppen 373
1.3. Homotopiegruppen von CSS-Gruppen 374
1.4. Homologiegruppen 375
1.5. CSS-Abbildungen und induzierte Homomorphismen 378
1.6. Der Hurewiczsche Homomorphismus 378
1.7. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus' für abelsche CSS-Gruppen und abelsche topologische Gruppen 380

§ 2. Geometrische Realisierung von CSS-Komplexen

2.1. Definition der geometrischen Realisierung 382
2.2. Existenz der geometrischen Realisierung 383
2.3. Induzierte Abbildungen 385
2.4. Produkte von CW-Komplexen 387
2.5. Produkte von CSS-Komplexen und ihre geometrische Realisierung 387
2.6. Geometrische Realisierung von CSS-Gruppen 391
2.7. Die Isomorphie der Homologiegruppen eines CSS-Komplexes und seiner geometrischen Realisierung 393
2.8. Die Isomorphie der Homotopiegruppen einer CSS-Gruppe und ihrer geometrischen Realisierung 396
2.9. Der Isomorphismus $H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|)$ 397
2.10. Vergleich mit Ergebnissen von A. Dold und R. Thom 399

§ 3. Abelsche CSS-Monoide und abelsche topologische Monoide[0])

3.1. CSS-Monoide und topologische Monoide 407
3.2. Bemerkungen über die Homotopiegruppen topologischer Monoide 408
3.3. Ein Hilfssatz 409
3.4. Ergänzungen zu 3.3 411
3.5. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus für abelsche topologische Monoide mit neutralem Element 412
3.6. Die Homotopieäquivalenz zwischen abelschen topologischen Gruppen und erzeugenden Untermonoiden 414
3.7. Anwendung auf das unendliche symmetrische Produkt 418

Einleitung. Der Begriff des vollständigen semi-simplizialen Komplexes (CSS-Komplex, vgl. 1.1) im Sinne von Eilenberg-Zilber [7], [8] gewinnt in der algebraischen Topologie immer größere Bedeutung. Er enthält den Begriff des singulären Komplexes eines topologischen Raumes und in gewissem Sinne den des simplizialen Komplexes als Spezialfälle (1.1 Beispiel 1 und 2).

[0]) § 3 erscheint als Teil II dieser Arbeit im nächsten Heft dieser Zeitschrift.

KAN [9] hat für eine gewisse Klasse von CSS-Komplexen eine Homotopietheorie entwickelt, die, angewandt auf den singulären Komplex eines topologischen Raumes, die übliche ergibt. Zu dieser Klasse von CSS-Komplexen gehören, wie MOORE ([11] Exp. 18 Th. 3) zeigte, insbesondere die CSS-Gruppen (vgl. 1.2). Für sie kann man aber eine einfachere Definition der Homotopiegruppen geben, als allgemein für die Kanschen CSS-Komplexe. Von dieser gehen wir hier aus und definieren für eine CSS-Gruppe $K = \bigcup_q K_q$ mit den Seitenoperatoren d_i die q-te Homotopiegruppe $\pi_q(K)$ durch

$$\pi_q(K) = \Big(K_q \cap \bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{Kern} d_i\Big) \Big/ d_{q+1}\Big(K_{q+1} \cap \bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{Kern} d_i\Big) \qquad \text{(vgl. 1.3)}.$$

Eine weitere Sonderstellung nehmen die abelschen CSS-Gruppen ein. Wichtige Beispiele sind erstens der singuläre CSS-Komplex $S(X)$ einer abelschen topologischen Gruppe X und zweitens die von einem beliebigen CSS-Komplex K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe ΓK (vgl. 1.2 Beispiel 1 und 2). Setzt man in einer abelschen CSS-Gruppe K mit den Seitenoperatoren d_i (bei additiver Schreibweise der Gruppenoperationen) $d = \sum_i (-1)^i d_i$, so kann man K als Kettenkomplex auffassen und seine Homologiegruppen $\mathfrak{H}_q(K)$ bilden (vgl. 1.4). Den Ausdruck „Homologiegruppen von K" für $\mathfrak{H}_q(K)$ vermeiden wir aber, denn als Homologiegruppen eines CSS-Komplexes K pflegt man $\mathfrak{H}_q(\Gamma K)$ zu bezeichnen. Wir schließen uns diesem Gebrauch an und schreiben $H_q(K) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K)$, oder für ein Paar $L \subset K$ von CSS-Komplexen: $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$. (Der Quotient $\Gamma K/\Gamma L$ ist in naheliegender Weise definiert, vgl. 1.2 und 1.4.)

Ein erstes Ergebnis dieser Arbeit, das unabhängig auch von MOORE bewiesen wurde[1]), ist die Isomorphie

$$\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K) \tag{1}$$

für jede abelsche CSS-Gruppe K (vgl. 1.4 Satz 2). Für den speziellen Fall, daß $K = S(X)$ der singuläre CSS-Komplex einer abelschen topologischen Gruppe ist (1.2 Beispiel 1), wurde diese Isomorphie von DOLD vermutet. Wir benutzen sie unter anderem dazu, für jede abelsche CSS-Gruppe K einen natürlichen Homomorphismus $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ zu definieren (E ist der CSS-Unterkomplex der neutralen Elemente, s. 1.6), dessen Zusammensetzung $g_* \circ h_*$ mit dem Hurewiczschen Homomorphismus $h_*: \pi_q(K) \to H_q(K, E)$ (der für CSS-Komplexe analog wie für topologische Räume erklärt wird, s. 1.6) die Identität ist (vgl. 1.7 Satz 3). Durch Anwendung auf den singulären CSS-Komplex $S(X)$ einer abelschen topologischen Gruppe X mit dem neutralen Element e folgt daraus die Existenz eines Homomorphismus $g_*: H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$, dessen Zusammensetzung $g_* \circ h_*$ mit dem Hurewiczschen Homomorphismus $h_*: \pi_q(X, e) \to H_q(X, e)$ die Identität ist (vgl. 1.7 Folgerung B). Insbesondere besagt das, daß h_* monomorph[2]) ist und daß $h_* \pi_q(X, e)$ [bzw.

[1]) Vgl. J. C. MOORE, Algebraic homotopy theory. Chapt. 2 Appendix A: Abelian group complexes. Princeton Lecture Notes 1956 (vervielfältigtes Manuskript).

[2]) Ein Homomorphismus $f: G \to G'$ heißt monomorph oder Monomorphismus, wenn sein Kern verschwindet. f heißt epimorph oder Epimorphismus, wenn $f(G) = G'$ ist.

$h_*\pi_q(K)]$ direkter Summand in $H_q(X, e)$ [bzw. $H_q(K, E)$] ist. In § 3[0]) konstruieren wir einen Homomorphismus $g_*: H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$ mit analogen Eigenschaften auch noch für den Fall, daß X ein bogenweise zusammenhängendes abelsches topologisches Monoid (Halbgruppe) mit neutralem Element e ist (vgl. 3.5 Satz 12).

Dold und Thom haben zu einem Raum X mit Grundpunkt l das unendliche symmetrische Produkt $SP(X)$ (vgl. [3], [4]) und eine von der Menge $X - l$ erzeugte freie abelsche Gruppe $AG(X)$ mit einer gewissen Topologie (vgl. [4]) konstruiert. Unter gewissen Voraussetzungen über X (über Einzelheiten s. 2.10) haben Dold und Thom die Isomorphien

$$\pi_q(SP(X)) \cong H_q(X, l) = H_q(X) \qquad q > 0, \tag{2}$$

$$\pi_q(AG(X)) \cong H_q(X, l) \tag{3}$$

dadurch bewiesen, daß sie die Axiome der Homologietheorie für die Gruppen $\pi_q(SP(X))$ und $\pi_q(AG(X))$ verifizierten (vgl. [3], [4]). Unter nur unwesentlich abweichenden Voraussetzungen beweisen wir diese Isomorphien auf völlig andere Weise und erhalten dabei zugleich explizite Isomorphismen, d.h. Isomorphismen, die sich mit Hilfe von singulären Ketten von X und Sphärenabbildungen in $SP(X)$ bzw. $AG(X)$ verhältnismäßig einfach angeben lassen [vgl. 2.10 Satz 10 und die Folgerung aus Satz 14 und 15 in 3.7[0])]. Bei der Definition dieser Isomorphismen spielt der obige Homomorphismus g_* eine entscheidende Rolle. Die Dold-Thomsche Methode liefert keine expliziten Isomorphismen, und dieser Umstand war es gerade, der den ersten Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gab.

In den ersten Abschnitten von § 2 werden wir die weitgehend bekannte, aber noch nicht in allgemein zugänglicher Form veröffentlichte Theorie der geometrischen Realisierung $|K|$ eines CSS-Komplexes K entwickeln[3]). Unter anderem wird dabei gezeigt, daß sich das Produkt $K \times K'$ zweier abzählbarer CSS-Komplexe durch das topologische Produkt $|K| \times |K'|$ geometrisch realisieren läßt (vgl. 2.5 Satz 5 und 2.4A.). Ist K eine abzählbare CSS-Gruppe, so folgt daraus, daß in $|K|$ eine Gruppenstruktur induziert wird, die $|K|$ zu einer topologischen Gruppe macht (vgl. 2.6 Satz 6). Für ein Paar $L < K$ von CSS-Komplexen wird die Isomorphie

$$H_q(K, L) \cong H_q(|K|, |L|) \tag{4}$$

bewiesen (vgl. 2.7 Satz 7) und für eine abelsche CSS-Gruppe K die Isomorphie

$$\pi_q(K) \cong \pi_q(|K|) \tag{5}$$

[3]) Andeutungen darüber findet man bei Kan ([9], III § 5). Die einzige Darstellung der Theorie mit genauen Definitionen und Beweisen gibt m.W. Milnor in „The geometric realization of a semi-simplicial complex". Princeton Seminar Notes 1956 (vervielfältigtes Manuskript). Sie enthält (bei Abweichungen in den Formulierungen und Beweisen) der Sache nach ungefähr dasselbe wie die Abschnitte 2.1 bis 2.8 der vorliegenden Arbeit, die verfaßt wurde, ehe mir die genannten Princeton Notes von Milnor und Moore [vgl. Fußnote[1]), S. 368] zugänglich waren.

Zusatz bei der Korrektur: Die genannte Arbeit von Milnor ist inzwischen in den Annals of Mathematics Bd. 65, 357–362 (1957) erschienen.

(vgl. 2.8 Satz 8). [(5) ist aber auch für nicht abelsche CSS-Gruppen K richtig, vgl. die Bemerkung in 2.8.]

Nun können wir unseren Beweis der Dold-Thomschen Isomorphie (3) kurz skizzieren: Für jedes Paar $L \subset K$ von CSS-Komplexen gilt

(6) $\pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|) \cong \pi_q(\Gamma K/\Gamma L)$ als Spezialfall von (5),

(7) $\pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$ als Spezialfall von (1),

(8) $\mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) = H_q(K, L)$ nach Definition.

Durch Zusammenfassung von (6), (7), (8) und (4) folgt

(9) $$\pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|) \cong H_q(|K|, |L|).$$

Ist L speziell der von einem Element $l_0 \in K_0$ erzeugte CSS-Unterkomplex $L = \{(s_0)^q l_0\}$ von K (vgl. 2.10, s_0 ist der 0-te Ausartungsoperator), so ist $|L|$ ein Punkt $l \in |K|$. Benutzt man ihn als Grundpunkt, so stellt sich heraus, daß $AG(|K|)$ für abzählbares K eine geometrische Realisierung von $\Gamma K/\Gamma L$ ist [2.10 (12)]. Aus (9) ergibt sich also $\pi_q(AG(|K|)) = H_q(|K|, l)$ d.h. die Isomorphie (3) für geometrische Realisierungen abzählbarer CSS-Komplexe.

Das wichtigste Ergebnis von § 3[0]) enthält der Abschnitt 3.6. In etwas ungenauer Formulierung, die aber das wesentliche hervorhebt, besagt es:

Ist G eine abelsche topologische Gruppe mit einer „semi-simplizialen Zellenzerlegung", die mit der Gruppenoperation verträglich ist, so ist jedes Untermonoid $M \subset G$ Deformationsretrakt von G, vorausgesetzt, daß M das neutrale Element von G enthält, die Gruppe G erzeugt und ein zusammenhängender Teilkomplex der Zellenzerlegung von G ist. (Vgl. die Folgerung aus Satz 13 sowie die anschließende Bemerkung in 3.6.) Als Spezialfall ergibt sich in 3.7, daß $SP(X)$ ein Deformationsretrakt von $AG(X)$ ist, wenn X die geometrische Realisierung eines abzählbaren CSS-Komplexes ist, und damit ist die Dold-Thomsche Isomorphie (2) auf (3) zurückgeführt.

Ich danke Herrn DOLD für viele anregende Gespräche und für die Information über seine und THOMS noch nicht veröffentlichten Ergebnisse und Beweismethoden.

§ 1. CSS-Komplexe und CSS-Gruppen

1.1. CSS-Komplexe. Wir betrachten vollständige semi-simpliziale Komplexe (CSS-Komplexe) im Sinne von EILENBERG-ZILBER [7], [8]. Bezeichnet $[q]$ die Menge der ganzen Zahlen von 0 bis q, so besteht ein *CSS-Komplex* $K = \bigcup_q K_q$ aus einer Folge von disjunkten Mengen K_q, $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (q heißt die Dimension der Elemente von K_q), in der jeder monotonen[4]) Abbildung $\beta: [p] \to [q]$ eine Abbildung $\beta^*: K_q \to K_p$ zugeordnet ist, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\iota^*: K_q \to K_q$ ist die Identität von K_q, wenn $\iota: [q] \to [q]$ die Identität von $[q]$ bezeichnet.

[4]) Unter „monoton" verstehen wir in dieser Arbeit immer: schwach monoton wachsend, d.h. hier: $\beta(i) \leq \beta(j)$, falls $i \leq j$.

b) Für alle monotonen Abbildungen $\beta: [p] \to [q]$, $\gamma: [r] \to [p]$ ist $(\beta \circ \gamma)^* = \gamma^* \circ \beta^*$.

Eine Teilmenge $L = \bigcup_q L_q \subset K$ mit $L_q \subset K_q$ heißt *CSS-Unterkomplex* von K, wenn für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ gilt: $\beta^*(L_q) \subset L_p$.

Besondere Beachtung verdienen die Abbildungen

$$\varepsilon: [q-1] \to [q] \quad \text{und} \quad \eta: [q+1] \to [q], \quad i = 0, \ldots, q,$$

definiert durch

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j, & j < i \\ j+1, & j \geq i \end{cases} \quad \text{(d.h. } i \in [q] \text{ wird ausgelassen)}$$

$$\eta_i(j) = \begin{cases} j, & j \leq i \\ j-1, & j > i \end{cases} \quad \text{(d.h. } i \in [q] \text{ wird „verdoppelt“).}$$

Wir bezeichnen ε_i^* und η_i^* auch mit d_i bzw. s_i. Die d_i heißen *Seiten-*, die s_i *Ausartungsoperatoren*. Die Bedingungen a), b) liefern für diese Abbildungen die Vertauschungsregeln:

$$\text{(Vt)} \qquad \begin{cases} d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i, & i < j \\ s_i \circ s_j = s_{j+1} \circ s_i, & i \leq j \\ d_i \circ s_j = s_{j-1} \circ d_i, & i < j \\ d_j \circ s_j = d_{j+1} \circ s_j = \text{Identität} \\ d_i \circ s_j = s_j \circ d_{i-1}, & i > j+1. \end{cases}$$

[Die erste Gleichung von (Vt) z.B. ist nur eine andere Schreibweise für $\varepsilon_i^* \circ \varepsilon_j^* = \varepsilon_{j-1}^* \circ \varepsilon_i^*$; nach b) ist das mit $(\varepsilon_j \circ \varepsilon_i)^* = (\varepsilon_i \circ \varepsilon_{j-1})^*$ äquivalent. Aus der Definition von ε_i entnimmt man aber unmittelbar $\varepsilon_j \circ \varepsilon_i = \varepsilon_i \circ \varepsilon_{j-1}$ für $i < j$. Entsprechend erhält man die anderen Gleichungen von (Vt).]

Bemerkung. Wie man leicht sieht, läßt sich jede monotone Abbildung $\beta: [p] \to [q]$ in der Form $\beta = \varepsilon_{j_1} \circ \cdots \circ \varepsilon_{j_t} \circ \eta_{i_1} \circ \cdots \eta_{i_s}$ $(q = p - s + t)$ schreiben und folglich β^* in der Form $\beta^* = s_{i_s} \circ \cdots \circ s_{i_1} \circ d_{j_t} \circ \cdots \circ d_{j_1}$. Daher genügt es zur Festlegung der Struktur eines CSS-Komplexes, die Mengen K_q und die Seiten- und Ausartungsoperatoren d_i, s_i zu kennen. Man kann auch zeigen, daß d_i und s_i beliebig vorgegeben werden können, wenn sie nur die Relationen (Vt) erfüllen (s. Eilenberg-MacLane [5] § 2). Dementsprechend definiert man einen CSS-Komplex manchmal als eine Menge $K = \bigcup_q K_q$ (K_q disjunkt, $q = 0, 1, 2, \ldots$) zusammen mit Abbildungen

$$d_i: K_q \to K_{q-1}, \qquad i = 0, \ldots, q$$
$$s_i: K_q \to K_{q+1}, \qquad i = 0, \ldots, q,$$

die den Vertauschungsregeln (Vt) genügen.

Beispiel 1. *Singulärer Komplex.* Sei X ein topologischer Raum. Für jedes $q \geq 0$ wählen wir ein bestimmtes euklidisches q-Simplex Δ_q und numerieren seine Ecken mit den ganzen Zahlen von 0 bis q. Jede Abbildung

$\beta: [p] \to [q]$ induziert dann eine affine Abbildung $\beta: \Delta_p \to \Delta_q$, bei der die Ecke i in die Ecke $\beta(i)$ übergeht. $S_q(X)$ sei die Menge der singulären q-Simplexe von X, d.h. der stetigen Abbildungen $\sigma: \Delta_q \to X$. $S(X) = \bigcup_q S_q(X)$ wird zu einem CSS-Komplex, dem *singulären CSS-Komplex* von X, wenn man für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ die Abbildung $\beta^*: S_q(X) \to S_p(X)$ durch $\beta^*(\sigma) = \sigma \circ \beta$ definiert.

Beispiel 2. *Simplizialer Komplex* (vgl. CARTAN [2] Exp. I und EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. II). Ein (unendlicher) abstrakter *simplizialer Komplex* (W, Φ) besteht aus einer Menge W von „Ecken" und einer Menge Φ von endlichen, nicht leeren Teilmengen von W, „Simplexe" genannt, so daß gilt:

a) Für jedes $P \in W$ ist $\{P\} \in \Phi$.

b) Ist $M' \subset M \subset W$, M' nicht leer und $M \in \Phi$, so ist auch $M' \in \Phi$.

Zu (W, Φ) gehört in bekannter Weise ein „geometrischer simplizialer Komplex" X, d.h. eine Menge X (der wir gleich eine Topologie geben werden) zusammen mit einer Zerlegung in euklidische Simplexe, die den „Simplexen" aus Φ umkehrbar eindeutig entsprechen (s. [6] Chapt. II Exercise F). Auf X sind im allgemeinen verschiedene Topologien sinnvoll, wir benutzen in dieser Arbeit immer die *„schwache Topologie"* (s. [6] Ch. II Ex. F): Eine Teilmenge von X ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Durchschnitt mit jedem abgeschlossenen euklidischen Simplex der Zerlegung in diesem Simplex offen (abgeschlossen) ist. Es dürfte keine Mißverständnisse verursachen, wenn wir in Zukunft abstrakte und geometrische simpliziale Komplexe nicht immer streng unterscheiden; insbesondere schreiben wir $X = (W, \Phi)$.

Sind $X = (W, \Phi)$, $X' = (W', \Phi')$ simpliziale Komplexe, so heißt $\varphi: W \to W'$ eine (abstrakte) *simpliziale Abbildung*, wenn für jedes $M \in \Phi$ auch $\varphi(M) \in \Phi'$ ist. Durch affine Fortsetzung von den Ecken auf die euklidischen Simplexe, aus denen X besteht, bestimmt φ eine stetige Abbildung $X \to X'$, die wir wieder mit φ bezeichnen und (geometrische) simpliziale Abbildung nennen.

Ein euklidisches Simplex Δ_q ist ein simplizialer Komplex mit der Eckenmenge $[q] = \{0, 1, \ldots, q\}$; seine Simplexmenge ist die Menge aller nicht leeren Teilmengen von $[q]$. Für irgendeinen simplizialen Komplex $X = (W, \Phi)$ sei $O_q(X)$ die Menge der simplizialen Abbildungen $\sigma: [q] \to W$ (bzw. $\sigma: \Delta_q \to X$). $O(X) = \bigcup_q O_q(X)$ wird zu einem CSS-Komplex, wenn man für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ die Abbildung $\beta^*: O_q(X) \to O_p(X)$ durch $\beta^*(\sigma) = \sigma \circ \beta$ definiert. Bei geometrischer Auffassung der simplizialen Abbildungen σ ist $O(X)$ offenbar ein CSS-Unterkomplex des singulären CSS-Komplexes $S(X)$ (vgl. Beispiel 1). Bei abstrakter Auffassung sind die Elemente von $O_q(X)$ nichts anderes als die $(q+1)$-tupel $(P_0, \ldots, P_q)$ von Ecken $(\in W)$, für die es ein Simplex $(\in \Phi)$ gibt, das alle P_i enthält. (Die P_i brauchen nicht voneinander verschieden zu sein.)

Ein simplizialer Komplex $X = (W, \Phi)$ heißt geordnet, wenn in seiner Eckenmenge W eine Teilordnung $\leq$ gegeben ist, die auf jedem $M \in \Phi$ eine

strenge Ordnung induziert. Ist X geordnet, so bilden die monotonen simplizialen Abbildungen $\sigma: [q] \to W$ (bzw. $\sigma: \Delta_q \to X$) einen CSS-Unterkomplex $O'(X)$ von $O(X)$. Bei abstrakter Auffassung sind die Elemente von $O'_q(X)$ die $(q+1)$-tupel $(P_0, \ldots, P_q)$ von Ecken $(\in W)$ die alle einem Simplex $(\in \Phi)$, angehören und für die $P_0 \leqq P_1 \leqq \cdots \leqq P_q$ gilt.

1.2. CSS-Gruppen.

Definition. Ein CSS-Komplex $K = \bigcup_q K_q$ heißt *CSS-Gruppenkomplex* oder kürzer *CSS-Gruppe*, wenn K_q für jedes q eine *Gruppenstruktur* trägt und die Abbildungen $\beta^*: K_q \to K_p$, die zu monotonen Abbildungen $\beta: [p] \to [q]$ gehören, *Homomorphismen* sind. (Weil sich jedes β^* aus den Seiten- und Ausartungsoperatoren d_i, s_i zusammensetzen läßt — vgl. die Bemerkung in 1.1 — würde es auch genügen, von d_i und s_i zu fordern, daß es Homomorphismen sind.)

$L = \bigcup_q L_q$ heißt CSS-Untergruppe von $K = \bigcup_q K_q$, wenn L CSS-Unterkomplex von K ist und jedes L_q Untergruppe von K_q. Ist L_q darüber hinaus Normalteiler in K_q, so kann man in naheliegender Weise die CSS-Faktorgruppe $K/L = \bigcup_q K_q/L_q$ definieren; $\beta^*: K_q/L_q \to K_p/L_p$ wird durch $\beta^*: K_q \to K_p$ induziert.

CSS-Gruppen werden unter dem Namen „complexes des groupes" von Moore in [11] behandelt. Der Begriff der abelschen CSS-Gruppe, mit dem wir es hier hauptsächlich zu tun haben werden, deckt sich mit dem des *FD*-Komplexes bei Eilenberg-MacLane [5].

Beispiel 1. Der singuläre CSS-Komplex $S(X)$ (vgl. 1.1 Beispiel 1) einer topologischen Gruppe X wird zu einer CSS-Gruppe, wenn man für $\sigma, \tau \in S_q(X)$ das Produkt $\sigma \cdot \tau$ durch

$$(\sigma \cdot \tau)(t) = \sigma(t) \cdot \tau(t) \qquad \text{für alle } t \in \Delta_q$$

definiert. Ist e das neutrale Element von X, so ist die konstante Abbildung $\Delta_q \to e \in X$ das neutrale Element von $S_q(X)$; $\bar{\sigma}$ ist invers zu σ in $S_q(X)$, wenn man $\bar{\sigma}(t) = (\sigma(t))^{-1}$ für alle $t \in \Delta_q$ setzt. Daß die Abbildungen $\beta^*: S_q(X) \to S_p(X)$ Homomorphismen sind, ist klar.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir dieses Beispiel noch etwas verallgemeinern:

Definition. Ein topologischer Raum X, der zugleich eine Gruppenstruktur trägt, heißt *C-Gruppe*, wenn die Gruppenoperation $\mu: X \times X \to X$ und der Übergang zum Inversen $\varphi: X \to X$ auf kompakten Teilmengen stetig sind, d.h. wenn $\mu | C$ stetig ist für jedes kompakte $C \subset X \times X$ und $\varphi | C$ stetig für jedes kompakte $C \subset X$.

Auch in einer C-Gruppe X ist das Produkt zweier singulärer Simplexe $\sigma, \tau: \Delta_q \to X$ eine stetige Abbildung $\sigma \cdot \tau: \Delta_q \to X$, weil Δ_q und daher $\sigma(\Delta_q) \times \tau(\Delta_q) \subset X \times X$ kompakt sind. $\bar{\sigma}: \Delta_q \to X$ [mit $\bar{\sigma}(t) = (\sigma(t))^{-1}$ wie oben] ist stetig, weil $\sigma(\Delta_q) \subset X$ kompakt ist. Folglich induziert die Gruppenstruktur von X in $S(X)$ auch dann die Struktur einer CSS-Gruppe, wenn X nur eine C-Gruppe ist.

Beispiel 2. Sei $K = \bigcup_q K_q$ ein beliebiger CSS-Komplex. Bezeichnet $\Gamma_q K$ die von K_q erzeugte freie abelsche Gruppe, so wird $\Gamma K = \bigcup_q \Gamma_q K$ zu einer abelschen CSS-Gruppe, wenn man die Abbildungen β^*, die in $K_q \subset \Gamma_q K$ bereits definiert sind, linear fortsetzt. Wir nennen ΓK die *von K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe.*

1.3. Homotopiegruppen von CSS-Gruppen. In einer CSS-Gruppe $K = \bigcup_q K_q$ führen wir die Abkürzung

$$K_q^r = K_q \cap \bigcap_{i \leq r} \operatorname{Kern} d_i$$

($K_q^r = K_q$ für $r < 0$, $K_q^r = K_q^q$ für $r > q$, $K_0^r = K_0$ für alle r) ein.

Definition. $K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q$ heißt *q-te Homotopiegruppe* von K und wird mit $\pi_q(K)$ bezeichnet.

Damit $K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q$ wirklich eine Gruppe ist, muß $d_{q-1} K_{q+1}^q$ in K_q^q Normalteiler sein. Tatsächlich ist $d_{q+1} K_{q+1}^q$ sogar Normalteiler in K_q. Um das zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß es für alle $a \in K_{q+1}^q$, $b \in K_q$ ein $a' \in K_{q+1}^q$ gibt, so daß $b \cdot d_{q+1} a \cdot b^{-1} = d_{q+1} a'$ ist. $a' = s_q b \cdot a \cdot s_q b^{-1}$ erfüllt diese Bedingung, denn es ist

$$d_{q+1}(s_q b \cdot a \cdot s_q b^{-1}) = b \cdot d_{q+1} a \cdot b^{-1} \quad \text{nach 1.1 (Vt), S. 371}$$

und wegen $d_i a = e_q$ für $i \leq q$ (e_q bezeichnet das neutrale Element von K_q)

$$d_i(s_q b \cdot a \cdot s_q b^{-1}) = d_i s_q b \cdot d_i s_q b^{-1} = e_q \qquad \text{für } i \leq q.$$

Zur Rechtfertigung der Bezeichnung „Homotopiegruppe" beweisen wir:

Satz 1. *Ist $S(X)$ der singuläre CSS-Komplex einer C-Gruppe X mit dem neutralen Element e (vgl. 1.2. Beispiel 1), so ist $\pi_q(S(X))$ die gewöhnliche Homotopiegruppe $\pi_q(X, e)$ von X zum Grundpunkt e.*

Wir erinnern zunächst an die Definition der Homotopiegruppen von topologischen Räumen: Ist X ein beliebiger topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fester Punkt, so ist $\pi_q(X, x_0)$ ($q > 0$) die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $\sigma: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, x_0)$ relativ zum Rand $\partial \Delta_q$ von Δ_q. Man definiert darüberhinaus in $\pi_q(X, x_0)$ eine Gruppenstruktur (vgl. z.B. STEENROD [12] Part II). Ist X eine topologische Gruppe und $x_0 = e$ ihr neutrales Element, so wird die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von repräsentierenden Abbildungen $\sigma, \tau: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, e)$ — definiert durch $(\sigma \cdot \tau)(t) = \sigma(t) \cdot \tau(t)$ für alle $t \in \Delta_q$ — induziert (vgl. [12] 16.7). In diesem Fall ist auch $\pi_0(X, e)$ erklärt (s. [12] 16.10), nämlich als die Gruppe der Bogenkomponenten von X. Eine Bogenkomponente von X ist eine Homotopieklasse von Abbildungen $\Delta_0 \to X$, die Definition von $\pi_0(X, e)$ ordnet sich also der allgemeinen unter, wenn man unter $\partial \Delta_0$ die leere Menge versteht. Da es sich immer nur um Abbildungen von kompakten Räumen in X handelt, überträgt sich alles, was hier über topologische Gruppen gesagt wurde, ohne Änderung auch auf C-Gruppen (vgl. 1.2 Beispiel 1).

Beweis von Satz 1. Für ein singuläres Simplex $\sigma: \Delta_q \to X$ ist $\sigma \in S_q^q(X) = S_q(X) \cap \bigcap_i \operatorname{Kern} d_i$ gleichbedeutend mit $\sigma(\partial \Delta_q) = e$. $\sigma \in S_q^q(X)$ besagt nämlich, daß $d_i\sigma$ für jedes i die konstante Abbildung $\Delta_{q-1} \to e \in X$ ist. Wegen $d_i\sigma = \varepsilon_i^* \sigma = \sigma \circ \varepsilon_i$ (vgl. 1.1) heißt das, daß σ jede Seite $\varepsilon_i(\Delta_{q-1})$ von Δ_q in e abbildet. $S_q^q(X)$ ist also gerade die Menge der Repräsentanten für die Elemente von $\pi_q(X, e)$. Weil die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von Repräsentanten induziert wird, ist $\pi_q(X, e)$ die Faktorgruppe von $S_q^q(X)$ nach dem Normalteiler der rel. $\partial \Delta_q$ nullhomotopen $\sigma \in S_q^q(X)$. Andererseits ist $\pi_q(S(X)) = S_q^q(X)/d_{q+1} S_{q+1}^q(X)$ mit $S_{q+1}^q(X) = S_{q+1}(X) \cap \bigcap_{i \leq q} \operatorname{Kern} d_i$.

$\sigma \in d_{q+1} S_{q+1}^q(X)$ bedeutet: Es gibt ein $\tau: \Delta_{q+1} \to X$, so daß $d_{q+1}\tau = \sigma$ und daß $d_i\tau$ für $i \leq q$ die konstante Abbildung $\Delta_q \to e \in X$ ist. Wegen $d_i\tau = \varepsilon_i^* \tau = \tau \circ \varepsilon_i$ (vgl. 1.1) lassen sich die Eigenschaften von τ auch so ausdrücken: $\tau: \Delta_{q+1} \to X$ bildet die Seiten $\varepsilon_i(\Delta_q)$ von Δ_{q+1} für $i \leq q$ in e ab und stimmt auf $\varepsilon_{q+1}(\Delta_q)$ mit σ überein (genauer: $\sigma = \tau \circ \varepsilon_{q+1}$). Die Existenz eines solchen τ ist offenbar äquivalent mit $\sigma \simeq 0$ rel. $\partial \Delta_q$ ($\simeq$ bedeutet: homotop), also ist $d_{q+1} S_{q+1}^q(X)$ gerade der Normalteiler der rel. $\partial \Delta_q$ nullhomotopen $\sigma \in S_q^q(X)$, und die Behauptung ist bewiesen.

$\pi_q(K)$ ist abelsch für $q > 0$ und jede CSS-Gruppe K, wie MOORE [11] Exp. 18 Th. 5 beweist. Für abelsche CSS-Gruppen gilt das trivialerweise (und zwar für alle q). Nur dieser Fall wird in der vorliegenden Arbeit eine Rolle spielen.

1.4. Homologiegruppen. In einer abelschen CSS-Gruppe K (mit additiv geschriebenen Gruppenoperationen) setzen wir

$$d = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i d_i : K_q \to K_{q-1} \qquad \text{für } q > 0.$$

Aus 1.1 (Vt) (S. 371) folgt durch einfache Rechnung $d \circ d = 0$. (K, d) ist daher ein Kettenkomplex (wenn wir für $q < 0$ $K_q = 0$ und $d = 0: K_{q+1} \to K_q$ setzen, vgl. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. V § 2). Seine Homologiegruppen

$$(K_q \cap \operatorname{Kern} d)/d K_{q+1}$$

bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_q(K)$.

Zu jedem CSS-Komplex K (ohne Gruppenstruktur) haben wir in 1.2 Beispiel 2 die von K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe ΓK konstruiert. Ist L ein CSS-Unterkomplex von K, so ist ΓL eine CSS-Untergruppe von K. Wir lassen den Fall zu, daß L leer ist, und verstehen dann unter ΓL die triviale CSS-Gruppe, die in jeder Dimension nur aus dem neutralen Element besteht. Auf die CSS-Faktorgruppe $\Gamma K/\Gamma L$ können wir die obige Konstruktion anwenden und erhalten die Gruppen $\mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$, die man als Homologiegruppen von K mod L — bzw. von K, falls L leer ist — zu bezeichnen pflegt. Wir haben daher diesen Gruppen das lateinische „H" vorbehalten und setzen $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$ sowie $H_q(K) = H_q(K, \emptyset) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K)$ ($\emptyset$ bezeichnet die leere Menge).

Ist $Y \subset X$ ein Paar von topologischen Räumen, so sind $H_q(S(X), S(Y)) = \mathfrak{H}_q(\Gamma S(X)/\Gamma S(Y))$ die üblichen singulären Homologiegruppen von X mod Y, für die wir auch $H_q(X, Y)$ schreiben [bzw. $H_q(X)$, falls Y leer ist].

Ist X eine abelsche C-Gruppe, so ist $S(X)$ nach 1.2 Beispiel 1 eine CSS-Gruppe, die in diesem Fall offenbar abelsch ist. Also können wir $\mathfrak{H}_q(S(X))$ bilden. Das sind aber keineswegs die Homologiegruppen von X, sondern wie wir gleich sehen werden, die Homotopiegruppen $\pi_q(X, e)$ (e = neutrales Element von X, vgl. Folgerung C aus Satz 2).

Satz 2. *Für jede abelsche CSS-Gruppe K besteht ein Isomorphismus*

$$\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K) \qquad \text{für alle } q \geq 0,$$

der durch die Identität induziert wird, d.h. bei dem entsprechende Elemente von $\pi_q(K)$ und $\mathfrak{H}_q(K)$ durch dasselbe Element von K_q repräsentiert werden können.

Beweis. Sei $K^r = \bigcup_q K_q^r$ mit $K_q^r = K_q \cap \bigcap_{i \leq r} \operatorname{Kern} d_i$ wie in 1.3. Ist $a \in K_q^r$, also $d_i a = 0$ für $i \leq r$, so folgt [vgl. 1.1 (Vt), S. 371]

$$d_i d_j a = \begin{cases} d_i 0 = 0 & \text{für } j \leq r \\ d_{j-1} d_i a = d_{j-1} 0 = 0 & \text{für } j > r,\ i \leq r, \end{cases}$$

d.h. $d_j a \in K_{q-1}^r$. Also gilt für alle j

$$d_j K_q^r \subset K_{q-1}^r. \tag{1}$$

Zwar ist im allgemeinen nicht auch $s_j K_q^r \subset K_{q+1}^r$, d.h. K^r ist kein CSS-Unterkomplex von K, aber aus (1) folgt, daß (K^r, d) ein Unterkomplex des Kettenkomplexes (K, d) ist mit $d = \sum_i (-1)^i d_i$. Analog zu $\mathfrak{H}_q(K)$ kann man daher $\mathfrak{H}_q(K^r) = (K_q^r \cap \operatorname{Kern} d)/d K_{q+1}^r$ bilden. Wir führen den Beweis von Satz 2, indem wir zeigen, daß die Injektionen $K^r \subset K^{r-1}$ Isomorphismen

$$\mathfrak{H}_q(K^{q-1}) \cong \mathfrak{H}_q(K^{q-2}) \cong \cdots \cong \mathfrak{H}_q(K^{-1}) = \mathfrak{H}_q(K) \tag{2}$$

induzieren und daß

$$\pi_q(K) = \mathfrak{H}_q(K^{q-1}) \tag{3}$$

ist.

Zum Beweis von (2) definieren wir für $0 \leq r \leq q$ den Homomorphismus $D_r: K_q^{r-1} \to K_{q+1}^{r-1}$ durch

$$D_r = \begin{cases} (-1)^r s_r \circ s_r \circ d_r, & 0 \leq r \leq q-1 \\ 0, & r = q. \end{cases}$$

$s_r s_r d_r K_q^{r-1}$ liegt tatsächlich in K_{q+1}^{r-1}, denn aus $d_i a = 0$ für $i \leq r-1$ folgt [vgl. 1.1 (Vt)]:

$$d_i s_r s_r d_r a = s_{r-1} s_{r-1} d_{r-1} d_i a = 0 \qquad \text{für } i \leq r-1.$$

Wir berechnen nun $d \circ D_r + D_r \circ d : K_q^{r-1} \to K_q^{r-1}$ für $0 \leqq r \leqq q-1$. In K_q^{r-1} ist für $r < q-1$

$$D_r \circ d = \sum_{i=r}^{q} (-1)^{i+r} s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_i$$

$$= s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_r - s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{q} (-1)^{i+r} s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_i .$$

Aus 1.1 (Vt) folgt $d_r \circ d_{r-1} = d_r \circ d_r$ und $s_r \circ s_r \circ d_r \circ d_i = d_{i+1} \circ s_r \circ s_r \circ d_r$ für $i \geqq r+2$, also

$$D_r \circ d = \sum_{i=r+2}^{q} (-1)^{i+r} d_{i+1} \circ s_r \circ s_r \circ d_r .$$

Für $r = q-1$ ist nach Definition $D_r \circ d = 0$. Andererseits ist (unter Beachtung von $D_r K_q^{r-1} \subset K_{q+1}^{r-1}$)

$$d \circ D_r = \sum_{i=r}^{q-1} (-1)^{i+r} d_i \circ s_r \circ s_r \circ d_r \qquad \text{für } 0 \leqq r \leqq q-1 .$$

Wir erhalten [vgl. 1.1 (Vt)]

$$(4) \quad \begin{cases} d \circ D_r + D_r \circ d = d_r \circ s_r \circ s_r \circ d_r - d_{r+1} \circ s_r \circ s_r \circ d_r + d_{r+2} \circ s_r \circ s_r \circ d_r \\ \qquad = s_r \circ d_r - s_r \circ d_r + s_r \circ d_{r+1} \circ s_r \circ d_r = s_r \circ d_r . \end{cases}$$

Bezeichnet $1 : K_q^{r-1} \to K_q^{r-1}$ die Identität, so besagt (4), daß $(1 - s_r \circ d_r) : K_q^{r-1} \to K_q^{r-1}$ für $r < q$ zur Identität kettenhomotop ist. Wegen $d_r \circ (1 - s_r \circ d_r) = d_r - d_r = 0$ ist

$$(5) \qquad (1 - s_r \circ d_r) K_q^{r-1} \subset K_q^r (\subset K_q^{r-1}) ;$$

wegen $d_r K_q^r = 0$ ist $(1 - s_r \circ d_r) \mid K_q^r$ die Identität. Die Kettenabbildung $(1 - s_r \circ d_r) : K_q^{r-1} \to K_q^r$ ist also für $r < q$ bis auf Kettenhomotopie zu der Injektion $K_q^r \to K_q^{r-1}$ invers (K_q^r ist „Ketten-Deformationsretrakt" von K_q^{r-1}), woraus (2) unmittelbar folgt.

Bei (3) steht nach Definition auf der einen Seite $\pi_q(K) = K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q$, auf der anderen $\mathfrak{H}_q(K^{q-1}) = (K_q^{q-1} \cap \operatorname{Kern} d) / d K_{q+1}^{q-1}$. Offenbar ist

$$(6) \qquad K_q^{q-1} \cap \operatorname{Kern} d = K_q^{q-1} \cap \operatorname{Kern} d_q = K_q^q$$

und

$$(7) \qquad d K_{q+1}^{q-1} \supset d K_{q+1}^q = d_{q+1} K_{q+1}^q .$$

In (7) gilt aber auch die Umkehrung der Inklusion, denn ist $a \in K_{q+1}^{q-1}$, so gibt es ein Element $a' \in K_{q+1}^q$, nämlich $a' = (-1)^{q+1}(1 - s_q \circ d_q) a$ [vgl. (5)] mit

$$d_{q+1} a' = (-1)^{q+1} (d_{q+1} a - d_{q+1} s_q d_q a) = (-1)^{q+1} d_{q+1} a + (-1)^q d_q a \qquad \text{[nach 1.1 (Vt)]}$$
$$= d a .$$

In Verschärfung von (7) gilt also

$$(8) \qquad d K_{q+1}^{q-1} = d_{q+1} K_{q+1}^q ,$$

und zusammen mit (6) ergibt das (3). Damit ist Satz 2 bewiesen.

Folgerungen:

A. $\pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) = H_q(K, L)$ *für jedes Paar* $L \subset K$ *von CSS-Komplexen.*

B. $\pi_q(\Gamma S(X)/\Gamma S(Y)) \cong \mathfrak{H}_q(\Gamma S(X)/\Gamma S(Y)) = H_q(X, Y)$ *für jedes Paar* $Y \subset X$ *von topologischen Räumen.*

C. $\mathfrak{H}_q(S(X)) \cong \pi_q(S(X)) = \pi_q(X, e)$ (vgl. 1.3 Satz 1) *für jede abelsche C-Gruppe* X *(mit dem neutralen Element* e*).*

Um später darauf Bezug nehmen zu können, formulieren wir noch ausdrücklich:

Folgerung D. *In einer abelschen CSS-Gruppe* K *gibt es zu jedem Element von* $\mathfrak{H}_q(K)$ *einen Repräsentanten* c*, der (nicht nur* $dc = 0$ *sondern auch)* $d_i c = 0$ *für alle* i *erfüllt.*

1.5. CSS-Abbildungen und induzierte Homomorphismen. Eine *CSS-Abbildung* $f: K \to K'$ zwischen CSS-Komplexen K, K' ist ein System von Abbildungen $f: K_q \to K'_q$, $q = 0, 1, \ldots$, so daß für jedes monotone $\beta: [p] \to [q]$ gilt

$$\beta^* \circ f = f \circ \beta^*.$$

(Äquivalent ist die Forderung: $d_i \circ f = f \circ d_i$, $s_i \circ f = f \circ s_i$, weil sich jedes β^* aus den d_i und s_i zusammensetzen läßt, vgl. die Bemerkung in 1.1.) Sind K und K' darüberhinaus CSS-Gruppen und die Abbildungen $f: K_q \to K'_q$ Homomorphismen, so heißt $f: K \to K'$ ein *CSS-Homomorphismus.*

Die folgenden Feststellungen bestätigt man ohne Schwierigkeiten:

A. *Ein CSS-Homomorphismus* $f: K \to K'$ *induziert Homomorphismen* $f_\pi: \pi_q(K) \to \pi_q(K')$. f_π *ist die Identität, wenn* $f: K \to K$ *es ist, und für die Zusammensetzung zweier CSS-Homomorphismen* f, f' *gilt:* $(f' \circ f)_\pi = f'_\pi \circ f_\pi$.

B. *Ein CSS-Homomorphismus* $f: K \to K'$ *zwischen abelschen CSS-Gruppen* K, K' *induziert Homomorphismen* $f_\mathfrak{H}: \mathfrak{H}_q(K) \to \mathfrak{H}_q(K')$. $f_\mathfrak{H}$ *ist die Identität, wenn* $f: K \to K$ *es ist, und es gilt:* $(f' \circ f)_\mathfrak{H} = f'_\mathfrak{H} \circ f_\mathfrak{H}$.

C. *Eine CSS-Abbildung* $f: (K, L) \to (K', L')$ *zwischen Paaren* $L \subset K$, $L' \subset K'$ *von CSS-Komplexen (d.h. eine CSS-Abbildung* $f: K \to K'$ *mit* $f(L) \subset L'$*) induziert die CSS-Homomorphismen*

$$\Gamma f: \Gamma K \to \Gamma K',$$
$$\overline{\Gamma} f: \Gamma K/\Gamma L \to \Gamma K'/\Gamma L'$$

und schließlich die Homomorphismen

$$f_H = (\overline{\Gamma} f)_\mathfrak{H}: H_q(K, L) \to H_q(K', L') \qquad \text{(vgl. 1.4).}$$

Wieder gelten die üblichen Regeln für Identität und Zusammensetzung.

1.6. Der Hurewiczsche Homomorphismus. Sei X ein beliebiger topologischer Raum, $x_0 \in X$ ein fester Punkt. Ein Element $\alpha \in \pi_q(X, x_0)$, $q > 0$ wird durch eine stetige Abbildung $\sigma: (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, x_0)$ repräsentiert (vgl. 1.3). Zugleich ist σ ein singuläres Simplex in X, und zwar ein Zykel $\bmod x_0$.

Ordnet man dem Element α die Homologieklasse dieses Zykels zu, so erhält man den Hurewiczschen Homomorphismus

$$h_*: \pi_q(X, x_0) \to H_q(X, x_0) \cong H_q(X), \qquad q > 0$$

(vgl. [12] 15.9).

Nach 1.4 ist $H_q(X, x_0) = H_q\big(S(X), S(x_0)\big) = \mathfrak{H}_q\big(\Gamma S(X)/\Gamma S(x_0)\big)$ und nach 1.3 Satz 1 für den Fall, daß X eine C-Gruppe mit dem neutralen Element $x_0 = e$ ist, $\pi_q(X, e) = \pi_q\big(S(X)\big)$. Also kann man den Hurewiczschen Homomorphismus in diesem Fall in der Form $h_*: \pi_q\big(S(X)\big) \to H_q\big(S(X), S(x_0)\big)$ schreiben. In dieser Form wird er auf beliebige CSS-Gruppen [an Stelle von $S(X)$] verallgemeinert:

Sei K eine CSS-Gruppe. Die neutralen Elemente $e_q \in K_q$ bilden eine CSS-Untergruppe $E = \{e_q\}$ von K. Wir setzen zur Abkürzung $\bar{\Gamma}K = \Gamma K/\Gamma E$. $h: K \to \bar{\Gamma}K$ sei die Abbildung, die sich aus der Injektion $K \subset \Gamma K$ und der Projektion $\Gamma K \to \bar{\Gamma}K$ zusammensetzt. h ist eine CSS-Abbildung, die zwar kein CSS-Homomorphismus ist, aber die neutralen Elemente $e_q \in K$ in die neutralen Elemente $0_q \in \bar{\Gamma}K$ überführt. (In $\bar{\Gamma}K$ schreiben wir die Gruppenoperationen additiv.) Folglich ist

$$h(K_q^q) \subset \bar{\Gamma}_q^q K \subset \bar{\Gamma}_q K \cap \operatorname{Kern} d$$

(zur Definition von K_q^r und entsprechend $\bar{\Gamma}_q^r K$ vgl. 1.3), d.h. h induziert $\bar{h}: K_q^q \to \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma}K)$. Ferner ist

$$h(d_{q+1} K_{q+1}^q) \subset d_{q+1} \bar{\Gamma}_{q+1}^q K \subset d\, \bar{\Gamma}_{q+1} K,$$

d.h. $\bar{h}$ induziert für jedes $q > 0$ einen Homomorphismus

$$h_*: \pi_q(K) = K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q \to \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma}K),$$

sofern bewiesen werden kann:

Hilfssatz. *$\bar{h}: K_q^q \to \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma}K)$ ist ein Homomorphismus für $q > 0$.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß $h(a \cdot b) - ha - hb$ für alle $a, b \in K_q^q$ ein d-Bild ist. Wir behaupten, es ist d-Bild von $(-1)^q hc$ mit $c = s_q a \cdot s_{q-1} b$. In der Tat ist [vgl. 1.1 (Vt), S. 371]:

$$d_{q+1} c = a \cdot s_{q-1} d_q b = a \qquad \text{(wegen } d_q b = e_{q-1}\text{)}$$

$$d_q c = a \cdot b$$

$$d_{q-1} c = s_{q-1} d_{q-1} a \cdot b = b \qquad \text{(wegen } d_{q-1} a = e_{q-1}\text{)}$$

$$d_i c = s_{q-1} d_i a \cdot s_{q-2} d_i b = e_q \quad \text{für } i \leq q-2 \qquad \text{(wegen } d_i a = d_i b = e_{q-1}\text{)},$$

folglich

$$\begin{aligned} d(-1)^q hc &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{i+q} h d_i c \\ &= -ha + h(a \cdot b) - hb + \sum_{i=0}^{q-2} (-1)^{i+q} h e_q \\ &= h(a \cdot b) - ha - hb \qquad \text{(wegen } h e_q = 0_q\text{)}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu dem Fall $q>0$ ist $\bar{h}: K_0 (= K_0^0) \to \mathfrak{H}_0(\bar{\Gamma} K)$ im allgemeinen kein Homomorphismus, aber es wird doch eine Abbildung $h_*: \pi_0(K) \to \mathfrak{H}_0(\bar{\Gamma} K)$ induziert. Repräsentieren nämlich $a, b \in K_0$ dasselbe Element von $\pi_0(K)$, so gibt es ein $c \in K_1^0$ mit $d_1 c = a \cdot b^{-1}$. Daraus folgt $d_1(c \cdot s_0 b) = a$, $d_0(c \cdot s_0 b) = b$ und $dh(c \cdot s_0 b) = hb - ha$, also $\bar{h}a = \bar{h}b$.

Damit ist die *„Hurewiczsche Abbildung"* (homomorph für $q > 0$) $h_*: \pi_q(K) \to \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K) = H_q(K, E)$ für jede CSS-Gruppe K erklärt. Für eine C-Gruppe X und $K = S(X)$, $q>0$, stimmt diese Definition offenbar mit der zuerst angegebenen überein.

Wir stellen schließlich fest:

$h: K \to \bar{\Gamma} K$ und damit auch $h_*: \pi_q(K) \to H_q(K, E)$ sind natürlich, d.h. für jeden CSS-Homomorphismus $f: K \to K'$ sind die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ \bar{\Gamma} K & \xrightarrow{\bar{\Gamma} f} & \bar{\Gamma} K' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_q(K) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_q(K') \\ {\scriptstyle h_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'_*} \\ H_q(K, E) & \xrightarrow{f_H} & H_q(K', E') \end{array}$$

kommutativ.

Bemerkung. Daß h_* hier als Abbildung in $H_q(K, E)$ und nicht in $H_q(K)$ definiert wurde, dient nur zur Vereinfachung der Definition. Während bei $h: K \subset \Gamma K \to \Gamma K / \Gamma E$ jedes $a \in K_q^q$ in einen Zykel übergeht (d.h. $dha = 0$), ist das bei der bloßen Injektion $K \subset \Gamma K$ nicht immer der Fall, denn in ΓK gilt für $q>0$

$$da = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i e_{q-1} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } q \\ e_{q-1} & \text{für gerades } q. \end{cases}$$

In den geraden Dimensionen $q>0$ müßte man a also abändern, um eine Abbildung $\pi_q(K) \to H_q(K)$ direkt zu erhalten. Wir könnten aber nachträglich $H_q(K, E)$ durch $H_q(K)$ ersetzen. Wie man leicht bestätigt, verschwindet $H_q(E)$ nämlich für $q>0$, $H_0(E)$ ist frei zyklisch, und $H_0(E) \to H_0(K)$, induziert durch $E \subset K$, ist monomorph; also erhält man aus der exakten Homologiefolge des Paares (K, E)

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H_q(E) & \to & H_q(K) & \to & H_q(K, E) & \to & H_{q-1}(E) & \to \cdots \\ & \| & & \| & & \| & & \| & \\ & \mathfrak{H}_q(\Gamma E) & & \mathfrak{H}_q(\Gamma K) & & \mathfrak{H}_q(\Gamma K / \Gamma E) & & \mathfrak{H}_{q-1}(\Gamma E) & \end{array}$$

(vgl. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. V Th. 3.7) die natürliche Isomorphie $H_q(K) \cong H_q(K, E)$ für $q>0$. In der Dimension 0 induziert die Injektion $K \subset \Gamma K$ sogar direkt eine Abbildung $\pi_0(K) \to H_0(K)$, weil d in $\Gamma_0 K$ überhaupt verschwindet. [Daß zwei verschiedene Repräsentanten eines Elements von $\pi_0(K)$ auch dasselbe Element von $H_0(K)$ repräsentieren, zeigt man wie oben bei $h_*: \pi_0(K) \to H_0(K, E)$.]

1.7. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus' für abelsche CSS-Gruppen und abelsche topologische Gruppen. Für eine abelsche

CSS-Gruppe K sei $\tilde{g}: \Gamma K \to K$ derjenige CSS-Homomorphismus, der in $K \subset \Gamma K$ die Identität ist. Schreiben wir die Gruppenoperationen in K multiplikativ, die in ΓK additiv, so ist also

$$\tilde{g}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \prod_i a_i^{n_i}, \qquad a_i \in K_q, \sum_i n_i a_i \in \Gamma_q K.$$

Wegen $\tilde{g}(\Gamma E) \subset E$ (mit $E = \{e_q\}$, $e_q =$ neutrales Element von K_q) induziert $\tilde{g}$ einen CSS-Homomorphismus $g: \bar{\Gamma} K = \Gamma K / \Gamma E \to K$. Wir definieren $g_*: H_q(K, E) = \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K) \to \pi_q(K)$ durch die Forderung, daß es sich unter Wahrung der Kommutativität in das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(\bar{\Gamma} K) & \xrightarrow{g_\pi} & \pi_q(K) \\ \| & \overset{g_*}{\nearrow} & \| \\ \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K) & \xrightarrow[g_{\mathfrak{H}}]{} & \mathfrak{H}_q(K) \end{array}$$

einfügt, wobei die senkrechten Isomorphismen die von 1.4 Satz 2 sind. (Das Ausgangsdiagramm ohne g_* ist kommutativ, weil die senkrechten Isomorphismen durch die Identität induziert werden.) Für ein $\alpha \in H_q(K, E)$ wird also $g_*(\alpha)$ nach folgender Vorschrift bestimmt:

Man wähle ein $c = \sum_i n_i a_i \in \Gamma_q K$, $a_i \in K_q$, *dessen Restklasse* $\bar{c} \in \bar{\Gamma}_q K = \Gamma_q K / \Gamma_q E$ *die Homologieklasse* $\alpha \in H_q(K, E) = \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K)$ *repräsentiert, und zwar so, daß* $d_j \bar{c} = 0$ *für alle* j. [Daß das möglich ist, folgt aus der Isomorphie $\pi_q(\bar{\Gamma} K) \cong \mathfrak{H}_q(\bar{\Gamma} K)$, vgl. 1.4 Satz 2 Folgerung D. $\bar{c}$ repräsentiert gleichzeitig das Urbild von α in $\pi_q(\bar{\Gamma} K)$.] *Dann ist* $\prod_i a_i^{n_i}$ *(Multiplikation in* K_q*) ein Repräsentant von* $g_*(\alpha)$.

Offenbar gilt:

$g: \bar{\Gamma} K \to K$ und damit auch $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ sind natürlich, d.h. für jeden CSS-Homomorphismus $f: K \to K'$ zwischen den abelschen CSS-Gruppen K, K' sind die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Gamma} K & \xrightarrow{\bar{\Gamma} f} & \bar{\Gamma} K' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ K & \xrightarrow{f} & K' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_q(K, E) & \xrightarrow{f_H} & H_q(K', E') \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'_*} \\ \pi_q(K) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_q(K') \end{array}$$

kommutativ.

Satz 3. *Für jede abelsche CSS-Gruppe K ist die Zusammensetzung*

$$\pi_q(K) \xrightarrow{h_*} H_q(K, E) \xrightarrow{g_*} \pi_q(K)$$

der Hurewiczschen Abbildung h_* mit dem obigen Homomorphismus g_* die Identität.

Beweis. Da h_*, g_* durch $h: K \to \bar{\Gamma} K$ (vgl. 1.6) bzw. $g: \bar{\Gamma} K \to K$ induziert werden, folgt die Behauptung aus der trivialen Beziehung $g \circ h =$ Identität.

Folgerung A. *Für jede abelsche CSS-Gruppe K ist $h_*: \pi_q(K) \to H_q(K, E)$ monomorph*[5]) *[einwertig*[6]) *für $q=0$], $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ epimorph*[5]), *und für $q>0$ ist $h_* \pi_q(K)$ direkter Summand in $H_q(K, E)$.*

Ist X eine abelsche C-Gruppe mit dem neutralen Element e, so erhalten wir mit $K = S(X)$ einen Homomorphismus

$$g_*: H_q(X, e) = H_q(S(X), S(e)) \to \pi_q(S(X)) = \pi_q(X, e)$$

und aus Satz 3:

Folgerung B. *Für jede abelsche C-Gruppe X (insbesondere also für jede abelsche topologische Gruppe X) mit dem neutralen Element e ist die Zusammensetzung*

$$\pi_q(X, e) \xrightarrow{h_*} H_q(X, e) \xrightarrow{g_*} \pi_q(X, e)$$

die Identität. Daher ist h_* monomorph (einwertig für $q=0$), g_* epimorph, und für $q>0$ ist $h_* \pi_q(X, e)$ direkter Summand in $H_q(X, e)$.

§ 2. Geometrische Realisierung von CSS-Komplexen

2.1. Definition der geometrischen Realisierung. In einem CSS-Komplex K heißt ein Element $a \in K_p$ *ausgeartet*, wenn es in der Form $a = s_j a'$ (mit geeignetem j) darstellbar ist.

Hilfssatz. *Für jedes $a \in K_p$ gibt es eine Darstellung $a = \beta^* b$, wobei $\beta: [p] \to [q]$ eine monotone Abbildung auf $[q]$ und $b \in K_q$ nicht ausgeartet ist. q, β und b sind dabei durch a eindeutig bestimmt.*

Einen Beweis dieses Hilfssatzes findet man bei EILENBERG-ZILBER [7] (8.3).

Definition. Ein CW-Komplex X (vgl. WHITEHEAD [13]) zusammen mit einer CSS-Abbildung $i: K \to S(X)$ des CSS-Komplexes K in den singulären CSS-Komplex $S(X)$ von X (vgl. 1.1 Beispiel 1) heißt *geometrische Realisierung* von K — Schreibweise: $X = |K|$ —, wenn es für jedes $q \geqq 0$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Zellen e^q von X und den nicht ausgearteten Elementen $b \in K_q$ gibt, so daß $ib: \Delta_q \to X$ eine charakteristische Abbildung für e^q ist (d.h. ib bildet den Rand $\partial \Delta_q$ in das $(q-1)$-dimensionale Gerüst $X^{(q-1)}$ von X und $\Delta_q - \partial \Delta_q$ topologisch auf e^q ab, vgl. [13] § 4).

Aus dieser Definition folgt, daß verschiedene Elemente von K bei $i: K \to S(|K|)$ auch verschiedene Bilder haben. Seien nämlich $a = \beta^* b$, $a' = \beta'^* b'$ beliebige Elemente von K_p in der Darstellung gemäß dem Hilfssatz. Dann ist $ia = \beta^* ib$, $ia' = \beta'^* ib'$, und als charakteristische Abbildungen von Zellen in X können ib und ib' in $S(|K|)$ nicht ausgeartet sein. Aus $ia = ia'$ folgt also nach der Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatzes $\beta = \beta'$ und $ib = ib'$.

[5]) Zur Definition von „monomorph" und „epimorph" s. Fußnote [2]) S. 368.

[6]) Weil es sich nicht um einen Homomorphismus handelt, ist das Wort „monomorph" nicht brauchbar. Um den Ausdruck „eineindeutig-in" zu vermeiden, bezeichnen wir jede Abbildung, bei der je zwei verschiedene Elemente auch verschiedene Bilder haben („jeder Wert tritt nur einmal auf"), als „einwertig". In Übereinstimmung damit findet sich in der englischen Literatur manchmal die Bezeichnung „univalent".

Wäre $b \neq b'$, so wären ib und ib' charakteristische Abbildungen verschiedener Zellen von X und damit $ib \neq ib'$. Also folgt aus $ia = ia'$ auch $b = b'$ und schließlich $a = a'$. K ist demnach mit seinem Bild $iK \subset S(|K|)$ isomorph. Wir können K als CSS-Unterkomplex von $S(|K|)$ auffassen.

Beispiel 1. Jeder simpliziale Komplex X im Sinne von 1.2 Beispiel 2 ist ein CW-Komplex, dessen Zellen die (offenen) Simplexe von X sind. Ist X geordnet, so haben wir den CSS-Komplex $O'(X) \subset S(X)$ (vgl. 1.2 Beispiel 2). Man bestätigt leicht, daß die Injektion $i: O'(X) \to S(X)$ die Bedingungen der obigen Definition erfüllt, d.h. X ist geometrische Realisierung von $O'(X)$.

Beispiel 2. Sei S^n die n-Sphäre, in der bekannten Weise in zwei Zellen e^0, e^n zerlegt. $\sigma: \Delta^n \to S^n$ sei eine charakteristische Abbildung (vgl. [13] § 4) für die Zelle e^n, und K sei der von σ in $S(S^n)$ erzeugte CSS-Unterkomplex. Da σ und $(d_0)^n\sigma$ die einzigen nicht ausgearteten Elemente von K sind, erfüllt die Injektion $i: K \to S(S^n)$ die Bedingungen der obigen Definition, d.h. S^n ist geometrische Realisierung von K.

2.2. Existenz der geometrischen Realisierung.

Satz 4. *Jeder CSS-Komplex* $K = \bigcup_q K_q$ *besitzt eine geometrische Realisierung* $|K|$.

Beweis. Sei $K^{(n)}$ — nicht zu verwechseln mit K^n in 1.4 — der von $\bigcup_{q \leq n} K_q$ erzeugte CSS-Unterkomplex von K. $K^{(n)}$ besteht demnach, wie man unter Benutzung des Hilfssatzes in 2.1 leicht bestätigt, aus allen Elementen der Form $\beta^* b$, wobei b ein nicht ausgeartetes Element von K_q, $q \leqq n$ und $\beta: [p] \to [q]$ eine monotone Abbildung auf $[q]$ ist. Wir konstruieren durch Induktion eine geometrische Realisierung $|K^{(n)}|$ von $K^{(n)}$, so daß $|K^{(n-1)}|$ ein CW-Teilkomplex von $|K^{(n)}|$ und die zu $K^{(n-1)}$ gehörende CSS-Abbildung $i_{n-1}: K^{(n-1)} \to S(|K^{(n-1)}|)$ (vgl. die Definition in 2.1) die Einschränkung der zu $K^{(n)}$ gehörenden CSS-Abbildung $i_n: K^{(n)} \to S(|K^{(n)}|)$ ist.

Die Menge K_0 mit der diskreten Topologie ist offenbar eine geometrische Realisierung von $K^{(0)}$; wir schreiben für sie also $|K^{(0)}|$. Die zugehörige CSS-Abbildung $i_0: K^{(0)} \to S(|K^{(0)}|)$ ordnet einem Element $\beta^* b \in K_p^{(0)}$ ($\beta: [p] \to [0]$, $b \in K_0$) das singuläre Simplex $i_0 \beta^* b: \Delta_p \to b \in K_0 = |K^{(0)}|$ zu. Nehmen wir nun an, daß $|K^{(m)}|$ und die zugehörige CSS-Abbildung $i_m: K^{(m)} \to S(|K^{(m)}|)$ für $m < n$ ($n > 0$) schon konstruiert sind und die obigen Forderungen erfüllen (d.h. $|K^{(m-1)}|$ ist CW-Teilkomplex von $|K^{(m)}|$ und $i_{m-1} = i_m | K^{(m-1)}$ für $m < n$)! Dann wählen wir zu jedem nicht ausgearteten $b \in K_n$ ein geordnetes euklidisches Simplex Δ_n^b. $d_j b$ liegt für jedes j in $K^{(n-1)}$, nach Induktionsvoraussetzung ist also das singuläre Simplex $i_{n-1} d_j b: \Delta_{n-1} \to |K^{(n-1)}|$ definiert. Ist $\varepsilon_j: \Delta_{n-1} \to \Delta_n^b$ die durch $\varepsilon_j: [n-1] \to [n]$ (vgl. 1.1, S. 371) induzierte affine Abbildung, so definieren wir $\varphi_b: \partial \Delta_n^b \to |K^{(n-1)}|$ durch

$$\varphi_b(t) = i_{n-1} d_j b\left(\varepsilon_j^{-1}(t)\right) \quad \text{für} \quad t \in \varepsilon_j(\Delta_{n-1}).$$

Wegen der ersten Vertauschungsregel [s. 1.1 (Vt), S. 371] ist φ_b eindeutig und folglich auch stetig.

[Ist nämlich $t \in \varepsilon_j(\Delta_{n-1}) \cap \varepsilon_k(\Delta_{n-1}) = \varepsilon_k \varepsilon_j(\Delta_{n-2}) = \varepsilon_j \varepsilon_{k-1}(\Delta_{n-2})$, $j<k$, so ist

$$\begin{aligned} i_{n-1} d_k b\left(\varepsilon_k^{-1}(t)\right) &= i_{n-1} d_k b\left(\varepsilon_j \varepsilon_j^{-1} \varepsilon_k^{-1}(t)\right) = i_{n-1} d_j d_k b\left((\varepsilon_k \circ \varepsilon_j)^{-1}(t)\right) \\ &= i_{n-1} d_{k-1} d_j b\left((\varepsilon_j \circ \varepsilon_{k-1})^{-1}(t)\right) \\ &= i_{n-1} d_j b\left(\varepsilon_{k-1} \varepsilon_{k-1}^{-1} \varepsilon_j^{-1}(t)\right) = i_{n-1} d_j b\left(\varepsilon_j^{-1}(t)\right). \end{aligned}$$

]

X entstehe nun aus $|K^{(n-1)}|$, indem man für jedes nicht ausgeartete $b \in K_n$ das Simplex Δ_n^b mittels φ_b an $|K^{(n-1)}|$ anheftet, d.h. man bildet die topologische Summe $|K^{(n-1)}| + \sum_b \Delta_n^b$ und identifiziert $t \in \partial \Delta_n^b$ mit $\varphi_b(t) \in |K^{(n-1)}|$. X ist ein CW-Komplex, dessen $(n-1)$-dimensionales Gerüst $|K^{(n-1)}|$ ist. Die n-Zellen $\mathring{\Delta}_n^b = \Delta_n^b - \partial \Delta_n^b$ von X entsprechen umkehrbar eindeutig den nicht ausgearteten Elementen $b \in K_n$, und die natürliche Abbildung $\sigma_b \colon \Delta_n \xrightarrow{=} \Delta_n^b \to X$ ist eine charakteristische Abbildung für die Zelle $\mathring{\Delta}_n^b$. Definiert man $i_n \colon K^{(n)} \to S(X)$ durch

$$i_n a = i_{n-1} a \in S\left(|K^{(n-1)}|\right) \subset S(X) \quad \text{für } a \in K^{(n-1)}$$

$$i_n \beta^* b = \beta^* \sigma_b \quad \text{für nicht ausgeartetes } b \in K_n \text{ und } \beta \colon [p] \xrightarrow{\text{auf}} [n],$$

so ist X zusammen mit i_n eine geometrische Realisierung $|K^{(n)}|$ von $K^{(n)}$.

[Zu verifizieren ist dazu nur noch, daß i_n wirklich eine CSS-Abbildung ist. Wir zeigen die Vertauschbarkeit mit d_j und s_j: Für jedes $a \in K^{(n-1)}$ ist

$$d_j i_n a = d_j i_{n-1} a = i_{n-1} d_j a = i_n d_j a$$

$$s_j i_n a = s_j i_{n-1} a = i_{n-1} s_j a = i_n s_j a,$$

weil i_{n-1} nach Induktionsvoraussetzung eine CSS-Abbildung ist. Für nicht ausgeartetes $b \in K_n$ und $\beta \colon [p] \xrightarrow{\text{auf}} [n]$ ist

$$s_j i_n \beta^* b = s_j \beta^* \sigma_b = (\beta \circ \eta_j)^* \sigma_b = i_n (\beta \circ \eta_j)^* b = i_n s_j \beta^* b,$$

weil mit β auch $\beta \circ \eta_j$ eine Abbildung auf $[n]$ ist (zur Definition von η_j vgl. 1.1). Zu zeigen bleibt also $d_j i_n \beta^* b = i_n d_j \beta^* b$. Nun ist entweder $\beta \circ \varepsilon_j \colon [p-1] \to [n]$ eine Abbildung auf $[n]$, dann ist wie für s_j

$$d_j i_n \beta^* b = d_j \beta^* \sigma_b = (\beta \circ \varepsilon_j)^* \sigma_b = i_n (\beta \circ \varepsilon_j)^* b = i_n d_j \beta^* b;$$

oder es ist $\beta \circ \varepsilon_j = \varepsilon_k \circ \beta'$ mit geeignetem k und geeignetem $\beta' \colon [p-1] \xrightarrow{\text{auf}} [n-1]$, dann ist

$$d_j i_n \beta^* b = d_j \beta^* \sigma_b = (\beta \circ \varepsilon_j)^* \sigma_b = (\varepsilon_k \circ \beta')^* \sigma_b = \beta'^* d_k \sigma_b = \beta'^* i_{n-1} d_k b,$$

letzteres wegen $d_k \sigma_b = \sigma_b \circ \varepsilon_k = \varphi_b \circ \varepsilon_k = i_{n-1} d_k b$ nach Definition von φ_b und σ_b, und schließlich

$$\beta'^* i_{n-1} d_k b = i_{n-1} \beta'^* d_k b = i_n \beta'^* d_k b = i_n d_j \beta^* b.$$

]

Nach Konstruktion ist $|K^{(n-1)}|$ CW-Teilkomplex von $|K^{(n)}|$ und i_{n-1} die Einschränkung von i_n auf $K^{(n-1)}$. Der direkte Limes $\lim_{n\to\infty} |K^{(n)}|$ [7]) der Folge $|K^{(0)}| \subset |K^{(1)}| \subset \cdots$ ist offenbar eine geometrische Realisierung von K, wenn man die CSS-Abbildung $i: K \to S(\lim_{n\to\infty} |K^{(n)}|)$ durch $i|K^{(n)} = i_n$ definiert.

2.3. Induzierte Abbildungen. Wir betrachten von nun an einen CSS-Komplex $K = \bigcup_q K_q$ immer als CSS-Unterkomplex des singulären Komplexes $S(|K|)$ der geometrischen Realisierung $|K|$ [d.h. wir identifizieren K vermöge $i: K \to S(|K|)$ mit $iK \subset S(|K|)$, vgl. 2.1]. Dann ist also jedes Element $a \in K_q$ zugleich ein singuläres Simplex $a: \Delta_q \to |K|$.

Eine CSS-Abbildung $f: K \to K'$ induziert eine Abbildung $|f|: |K| \to |K'|$ durch die Festsetzung

$$|f|(x) = fb(b^{-1}(x)) \tag{1}$$

für alle nicht ausgearteten $b \in K_q$, $q = 0, 1, \ldots$ und alle $x \in b(\mathring{\Delta}_q)$. [$\mathring{\Delta}_q = \Delta_q - \dot{\partial}\Delta_q$ ist das Innere von Δ_q, $\mathring{\Delta}_0 = \Delta_0$; $b|\Delta_q: \Delta_q \to b(\Delta_q)$ $|K|$ ist topologisch, b^{-1} ist die dazu inverse Abbildung.] Da $b(\mathring{\Delta}_q)$ gerade alle Zellen von $|K|$ durchläuft, ist $|f|$ wirklich eindeutig definiert.

Mit (1) äquivalent ist offenbar

$$|f| \circ b|\mathring{\Delta}_q = fb|\mathring{\Delta}_q \qquad \text{für alle nicht ausgearteten } b \in K_q. \tag{2}$$

Daraus folgt schärfer

$$|f| \circ a|\mathring{\Delta}_p = fa|\mathring{\Delta}_p \qquad \text{für alle } a \in K_p,\ p = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Wir können nämlich nach dem Hilfssatz in 2.1 $a = \beta^* b$ setzen mit nicht ausgeartetem $b \in K_q$ und $\beta: [p] \overset{\text{auf}}{\longrightarrow} [q]$. Nach Definition gilt

$$|f| \circ a = |f| \circ \beta^* b = |f| \circ b \circ \beta;$$

wegen $\beta(\mathring{\Delta}_p) \subset \mathring{\Delta}_q$ ist nach (2)

$$|f| \circ b \circ \beta|\mathring{\Delta}_p = fb \circ \beta|\mathring{\Delta}_p,$$

und weil f eine CSS-Abbildung ist, haben wir

$$fb \circ \beta = \beta^* fb = f\beta^* b = fa.$$

Zusammengefaßt ergibt das (3). Schließlich folgt sogar

$$|f| \circ a = fa \qquad \text{auf ganz } \Delta_p,\ a \in K_p,\ p = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

[7]) Für eine Folge von topologischen Räumen $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ definiert man $\lim_{n\to\infty} X_n$ als die Menge $\bigcup_n X_n$ mit folgender Topologie: Eine Teilmenge $A \subset \bigcup_n X_n$ ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn $A \cap X_n$ für jedes n in X_n offen (abgeschlossen) ist. Sind alle X_n CW-Komplexe, und ist X_n für jedes n Teilkomplex von X_{n+1}, so ist offenbar auch $\lim_{n\to\infty} X_n$ ein CW-Komplex.

Zum Beweis betrachten wir irgendein $t \in \Delta_p$. Es gibt eine (streng) monotone Abbildung $\gamma: [r] \to [q]$ (und damit $\gamma: \Delta_r \to \Delta_p$) und ein $t' \in \overset{\circ}{\Delta}_r$, so daß $t = \gamma(t')$ ist. Dann ist

$$|f|(a(t)) = |f|(a(\gamma(t'))) = |f|((\gamma^* a)(t')) = (f\gamma^* a)(t') \qquad \text{nach (3)}$$
$$= (\gamma^* f a)(t') = f a(\gamma(t')) = f a(t).$$

Da $a: \Delta_p \to a(\Delta_p) \subset |K|$ eine Identifizierungsabbildung ist (Δ_p ist kompakt, und $|K|$ ist ein Hausdorffscher Raum), ergibt sich aus der Stetigkeit von $fa: \Delta_p \to |K'|$ die von $|f| | a(\Delta_p)$. Insbesondere ist $|f|$ auf allen abgeschlossenen Zellen von $|K|$ stetig, und es folgt [s. WHITEHEAD [13] § 5 (A)]:

A. *$|f|$ ist stetig.*

Eine unmittelbare Folge der Definition von $|f|$ ist:

B. *$|f' \circ f| = |f'| \circ |f|$ für zwei CSS-Abbildungen $f: K \to K'$, $f': K' \to K''$. $f|$ ist die Identität von $|K|$, wenn $f: K \to K$ die Identität von K ist.*

Aus A. und B. folgt sofort:

C. *Die geometrische Realisierung $|K|$ eines CSS-Komplexes K ist bis auf Homöomorphie durch K eindeutig bestimmt.*

Wir stellen ferner fest:

D. *Ist L ein CSS-Unterkomplex von K, so kann man $|L|$ als CW-Teilkomplex von $|K|$ auffassen, und die Injektion $j: L \to K$ induziert die Injektion $j|: |L| \to |K|$.*

Beweis. Wie man leicht sieht, ist $a(\Delta_p) \subset |K|$ für jedes $a \in K_p$ ein CW-Teilkomplex. Seine Zellen entsprechen den nicht ausgearteten $b \in K$, die man erhält, wenn man $\gamma^* a$ für jedes monotone $\gamma: [r] \to [p]$ gemäß dem Hilfssatz von 2.1 in der Form $\gamma^* a = \beta^* b$ schreibt ($\beta: [r] \xrightarrow{\text{auf}} [q]$). Liegt a in L, so auch jedes so konstruierte b, denn die Konstruktion verläuft ganz innerhalb des CSS-Komplexes L. Also ist $X = \bigcup_{p} \bigcup_{a \in L_p} a(\Delta_p)$ ein CW-Teilkomplex von $|K|$ und besteht aus den Zellen von $|K|$, die den nicht ausgearteten Elementen von L entsprechen. Das zeigt, daß X eine geometrische Realisierung von L ist. Nimmt man $X \subset |K|$ für $|L|$, so ist $|j|: |L| \to |K|$ nach seiner Definition die Injektion.

E. *Ist $f: K \to K'$ eine CSS-Abbildung auf K', so ist $|f|: |K| \to |K'|$ eine Identifizierungsabbildung.*

Beweis. Jeder Punkt $x' \in |K'|$ liegt in einer Zelle $b'(\overset{\circ}{\Delta}_q)$, wobei b' ein nicht ausgeartetes Element von K'_q ist. Nach Voraussetzung gibt es ein $b \in K_q$ mit $b' = fb$. Es folgt: $x' \in fb(\overset{\circ}{\Delta}_q) = |f|(b(\overset{\circ}{\Delta}_q))$ nach (4), also $x' \in |f|(|K|)$, d.h. $|f|$ ist eine Abbildung auf $|K'|$.

Nun muß noch gezeigt werden, daß jede Teilmenge $A \subset |K'|$, für die $|f|^{-1}(A)$ abgeschlossen ist, selbst abgeschlossen ist. Weil $|K'|$ ein CW-Komplex ist, genügt es zu zeigen, daß der Durchschnitt von A mit der abgeschlossenen Hülle jeder Zelle, d.h. mit jedem $b'(\Delta_q)$ abgeschlossen ist (schwache Topologie,

vgl. WHITEHEAD [13] § 5). $b' : \Delta_q \to b'(\Delta_q)$ ist eine Identifizierungsabbildung (weil Δ_q kompakt und $|K'|$ ein Hausdorffscher Raum ist), also braucht man nur zu beweisen, daß $b'^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Wie oben sei $b' = fb$, $b \in K_q$. Dann ist nach (4) $b'^{-1}(A) = b^{-1}|f|^{-1}(A)$. Das ist aber eine abgeschlossene Menge, weil $|f|^{-1}(A)$ abgeschlossen und $b : \Delta_q \to |K|$ stetig ist.

2.4. Produkte von CW-Komplexen. Das topologische Produkt $X \times X'$ zweier CW-Komplexe X, X' ist ein hüllenfiniter Zellenkomplex (s. WHITEHEAD [13] § 4 und § 5 (H)) mit den Zellen $e^r \times {}'e^s$ (e^r, ${}'e^s$ sind die Zellen von X bzw. X'). $X \times X'$ trägt (wie DOWKER durch ein Gegenbeispiel zeigte[7a]) nicht immer die schwache Topologie bezüglich dieser Zellenzerlegung, d.h. $X \times X'$ ist kein CW-Komplex. Wir erhalten aber einen CW-Komplex, wenn wir in der Menge $X \times X'$ folgende neue Topologie (die *schwache* Topologie) einführen: $A \subset X \times X'$ ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn $A \cap (\overline{e^r} \times \overline{{}'e^s})$ für jedes Paar von Zellen $e^r \subset X$, ${}'e^s \subset X'$ in $\overline{e^r} \times \overline{{}'e^s}$ offen (abgeschlossen) ist. ($\overline{e^r}$, $\overline{{}'e^s}$ sind die abgeschlossenen Hüllen von e^r bzw. ${}'e^s$ in X bzw. X'.) Den Zellenkomplex $X \times X'$, versehen mit dieser Topologie, bezeichnen wir mit $X \otimes X'$.

Die Topologie von $X \otimes X'$ ist offenbar feiner als die Produkttopologie in $X \times X'$. In vielen Fällen ist sie sogar dieselbe, denn es gilt:

A. *Für abzählbare CW-Komplexe X, X' (d.h. CW-Komplexe mit abzählbar vielen Zellen) stimmen die Topologien von $X \otimes X'$ und $X \times X'$ überein: $X \otimes X' = X \times X'$.*

(Unter „abzählbar" wird hier und im folgenden immer endlich oder abzählbar unendlich verstanden.) Zum Beweis vgl. z.B. MILNOR [10] Lemma 2.1.

Für beliebige CW-Komplexe X, X' gilt noch:

B. *Die kompakten Teilmengen von $X \otimes X'$ sind dieselben wie die von $X \times X'$, und die auf ihnen induzierten Topologien sind gleich.*

Beweis. Jedes kompakte $C \subset X \otimes X'$ ist auch kompakt in $X \times X'$ (wegen der Stetigkeit der Identität $X \otimes X' \to X \times X'$). Jedes kompakte $C \subset X \times X'$ ist in $p(C) \times p'(C)$ enthalten (wobei $p : X \times X' \to X$ und $p' : X \times X' \to X'$ die Projektionen sind). Als kompakte Mengen liegen $p(C)$, $p'(C)$ in endlichen Teilkomplexen Y, Y' von X bzw. X' (s. [13] § 5 (D),) d.h. $C \subset Y \times Y'$. $Y \times Y'$ und $Y \otimes Y'$ haben aber dieselbe Topologie, was man entweder aus A. entnimmt oder sehr leicht direkt bestätigt. Also ist C auch kompakt in $Y \otimes Y' \subset X \otimes X'$, und $X \times X'$ und $X \otimes X'$ induzieren dieselbe Topologie auf C.

2.5. Produkte von CSS-Komplexen und ihre geometrische Realisierung. Zu zwei CSS-Komplexen $K = \bigcup_q K_q$, $K' = \bigcup_q K'_q$ wird das *Produkt* $K \times K' = \bigcup_q (K \times K')_q$ folgendermaßen definiert (vgl. EILENBERG-ZILBER [8]): $(K \times K')_q$ ist die Produktmenge $K_q \times K'_q$, und zu einer monotonen Abbildung $\beta : [p] \to [q]$ gehört die Abbildung $\beta^* : (K \times K')_q \to (K \times K')_p$, definiert durch $\beta^*(a, a') = (\beta^* a, \beta^* a')$, $a \in K_q$, $a' \in K'_q$. Wie man ohne Schwierigkeiten bestätigt, ist z.B. $S(X \times X') = S(X) \times S(X')$ für irgend zwei topologische Räume X, X'.

[7a]) DOWKER, C. H.: Topology of metric complexes. Amer. J. Math. **74**, 555–577 (1952), Chapt. III, 5.

Wir definieren eine CSS-Abbildung $i: K \times K' \to S(|K| \otimes |K'|)$ durch

$$i(a, a')(t) = (a(t), a'(t)), \qquad t \in \Delta_q \tag{1}$$

für alle $a \in K_q \subset S_q(|K|)$, $a' \in K'_q \subset S_q(|K'|)$, $q = 0, 1, \ldots$. Die Abbildung $i(a, a'): \Delta_q \to |K| \otimes |K'|$ ist stetig, weil sie es als Abbildung in $|K| \times |K'|$ ist, und weil ihr Bild kompakt ist (vgl. 2.4 B.). Daß i tatsächlich eine CSS-Abbildung ist, bestätigt man sehr leicht.

Satz 5. *K, K' seien beliebige CSS-Komplexe. Es gibt eine CW-Zellenzerlegung von $|K| \otimes |K'|$, die eine Unterteilung der ursprünglichen (vgl. 2.4) ist, so daß $|K| \otimes |K'|$ (mit der neuen Zellenzerlegung) zusammen mit der durch* (1) *definierten CSS-Abbildung $i: K \times K' \to S(|K| \otimes |K'|)$ eine geometrische Realisierung von $K \times K'$ ist.*

Entsprechend der Vereinbarung zu Beginn von 2.3 identifizieren wir dann $(a, a') \in K \times K'$ mit $i(a, a') \in S(|K| \otimes |K'|)$ und haben an Stelle von (1)

$$(a, a')(t) = (a(t), a'(t)), \qquad t \in \Delta_q. \tag{2}$$

Beweis von Satz 5. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $K = O'(X)$, $K' = O'(X')$ für zwei endliche (d.h. aus endlich vielen Simplexen bestehende) geordnete simpliziale Komplexe X, X' (vgl. 1.1 Beispiel 2). Bekanntlich (siehe z.B. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. II § 8) besitzt $X \times X'$ folgende simpliziale Zerlegung: Die Ecken sind die Paare (P, P') von Ecken P, P' von X bzw. X'. Man definiert eine Teilordnung der Ecken durch die Forderung, daß $(P, P') \leqq (Q, Q')$ mit $P \leqq Q$ (in X) und $P' \leqq Q'$ (in X') äquivalent sein soll. Eine endliche Menge von Ecken $M = \{(P_i, P'_i)\}$ bildet genau dann ein Simplex von $X \times X'$, wenn die Ecken P_i und P'_i alle einem Simplex von X bzw. X' angehören, und wenn die Teilordnung $\leqq$ in M eine strenge Ordnung induziert, d.h. wenn bei geeigneter Numerierung

$$(P_0, P'_0) < (P_1, P'_1) < \cdots < (P_q, P'_q)$$

gilt. Faßt man die Elemente von $O'_q(X)$, $O'_q(X')$ und $O'_q(X \times X')$ als geordnete $(q+1)$-tupel von Ecken auf (vgl. 1.1 Beispiel 2), so liefert die Zuordnung

$$\big((P_0, P'_0), \ldots, (P_q, P'_q)\big) \leftrightarrow \big((P_0, \ldots, P_q), (P'_0, \ldots, P'_q)\big)$$

die Isomorphie der CSS-Komplexe

$$O'(X \times X') = O'(X) \times O'(X'). \tag{3}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch die Abbildungen β^* auf beiden Seiten einander entsprechen. Nach 2.1 Beispiel 1 folgt aus (3)

$$|O'(X)| \times |O'(X')| = X \times X' = |O'(X \times X')| = |O'(X) \times O'(X')|,$$

d.h. die Behauptung des Satzes in dem betrachteten Spezialfall.

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns dem allgemeinen Fall beliebiger CSS-Komplexe K, K' zu. Die Abbildung $i(a, a'): \Delta_q \to |K| \otimes |K'|$, $a \in K_q$, $a' \in K'_q$ [vgl. (1)] setzt sich aus der Injektion der Diagonalen $\delta: \Delta_q \to \Delta_q \times \Delta_q$ [$\delta(t) = (t, t)$ für alle $t \in \Delta_q$] und der Produktabbildung $a \times a': \Delta_q \times \Delta_q \to |K| \otimes |K'|$ zusammen. (Letztere ist stetig, weil sie als Abbildung in $|K| \times |K'|$ stetig

ist und ihr Bild kompakt ist, vgl. 2.4 B.) Schreibt man (a, a') in der Form $(\beta^* b, \beta'^* b')$ mit nicht ausgearteten $b \in K_r$, $b' \in K'_s$ und monotonen Abbildungen $\beta\colon [q] \xrightarrow{\text{auf}} [r]$, $\beta'\colon [q] \xrightarrow{\text{auf}} [s]$ (vgl. den Hilfssatz in 2.1), so läßt sich $i(a, a') = (a \times a') \circ \delta$ in

$$\Delta_q \xrightarrow{\delta} \Delta_q \times \Delta_q \xrightarrow{\beta \times \beta'} \Delta_r \times \Delta_s \xrightarrow{b \times b'} \overline{e^r} \times \overline{'e^s} < |K| \otimes |K'|$$

zerlegen. Die vorkommenden euklidischen Simplexe können wir als simpliziale Komplexe auffassen und nach der Vorbemerkung über simpliziale Komplexe auch ihre topologischen Produkte. Dann ist $(\beta \times \beta') \circ \delta \in O'(\Delta_r \times \Delta_s)$ und entspricht bei der Isomorphie (3) dem Element $(\beta, \beta') \in O'(\Delta_r) \times O'(\Delta_s)$. Die Elemente

$$(\beta \times \beta') \circ \delta \in O'(\Delta_r \times \Delta_s)$$
$$(\beta, \beta') \in O'(\Delta_r) \times O'(\Delta_s)$$
$$(\beta^* b, \beta'^* b') \in K \times K'$$

sind alle drei zugleich ausgeartet oder nicht.

[Für die ersten beiden ist das klar wegen der Isomorphie (3). Wir brauchen es nur noch für die beiden letzten zu beweisen: Ist $(\beta, \beta') = s_j(\gamma, \gamma') = (\eta_j^* \gamma, \eta_j^* \gamma') = (\gamma \circ \eta_j, \gamma' \circ \eta_j)$, so ist $(\beta^* b, \beta'^* b') = (\eta_j^* \gamma^* b, \eta_j^* \gamma'^* b') = s_j(\gamma^* b, \gamma'^* b')$. Wenn umgekehrt $(\beta^* b, \beta'^* b') = s_j(c, c')$ vorausgesetzt wird, so schreiben wir c, c' gemäß dem Hilfssatz in 2.1 in der Form $c = \beta_1^* b_1$, $c' = \beta_1'^* b_1'$ mit nicht ausgearteten $b_1 \in K_{r_1}$, $b_1' \in K'_{s_1}$ und $\beta_1\colon [q-1] \xrightarrow{\text{auf}} [r_1]$, $\beta_1'\colon [q-1] \xrightarrow{\text{auf}} [s_1]$. Dann ist

$$\beta^* b = \eta_j^* \beta_1^* b_1 = (\beta_1 \circ \eta_j)^* b_1$$
$$\beta'^* b' = \eta_j^* \beta_1'^* b_1' = (\beta_1' \circ \eta_j)^* b_1',$$

und wegen der Eindeutigkeitsaussage des zitierten Hilfssatzes folgt $b_1 = b$, $b_1' = b'$ und $\beta = \beta_1 \circ \eta_j$, $\beta' = \beta_1' \circ \eta_j$, d.h. $(\beta, \beta') = s_j(\beta_1, \beta_1')$.]

Im nicht ausgearteten Fall ist $(\beta \times \beta') \circ \delta$ eine topologische Abbildung. Weil β, β' Abbildungen auf $[r]$ bzw. $[s]$ sein sollten, ist

$$(\beta \times \beta')\, \delta(\mathring{\Delta}_q) < \mathring{\Delta}_r \times \mathring{\Delta}_s = \Delta_r \times \Delta_s - \partial(\Delta_r \times \Delta_s).$$

$\mathring{\Delta}_r \times \mathring{\Delta}_s$ wird aber durch $b \times b'$ topologisch auf die Zelle $e^r \times {}'e^s$ abgebildet; also gilt:

a) Für nicht ausgeartetes $(a, a') \in (K \times K')_q$ wird $\mathring{\Delta}_q$ durch $i(a, a')$ topologisch auf eine Teilmenge von $|K| \otimes |K'|$ abgebildet.

Durchlaufen β und β' alle monotonen Abbildungen auf $[r]$ bzw. $[s]$, für die (β, β') nicht ausgeartet ist, so durchläuft $(\beta \times \beta')\, \delta(\Delta_q)$ gerade die Simplexe von $\Delta_r \times \Delta_s$, die nicht ganz auf dem Rande $\partial(\Delta_r \times \Delta_s)$ liegen. $\{(\beta \times \beta')\, \delta(\mathring{\Delta}_q)\}$ ist also eine Zerlegung von $\mathring{\Delta}_r \times \mathring{\Delta}_s$, die sich durch $b \times b'$ auf $e^r \times {}'e^s$ überträgt. Läßt man nun auch b, b' und entsprechend $e^r, {}'e^s$ variieren, so ergibt sich:

b) Die Zellen $i(a, a')(\mathring{\Delta}_q)$ bilden eine Zerlegung von $|K| \otimes |K'|$, wenn (a, a') alle nicht ausgearteten Elemente von $K \times K'$ durchläuft.

Zugleich haben wir gesehen (wenn man noch bedenkt, daß $\Delta_r \times \Delta_s$ nur aus endlich vielen Simplexen besteht):

c) Jede Zelle $e^r \times {}'e^s \subset |K| \otimes |K'|$ ist Vereinigung von endlich vielen Zellen der Zerlegung b).

Aus a) — c) folgt nun leicht, daß die neue Zerlegung von $|K| \otimes |K'|$ einen CW-Komplex bildet: Nach a) und b) ist es eine Zerlegung in Zellen; nach a) gibt es für jede Zelle eine charakteristische Abbildung, d.h. die Zerlegung bildet einen Zellenkomplex (vgl. WHITEHEAD [*13*] § 4). Er ist nach c) hüllenfinit und trägt die schwache Topologie (vgl. [*13*] § 5), weil die ursprüngliche Zerlegung $\{e^r \times {}'e^s\}$ diese Eigenschaften hat.

[Beweis. Ein Zellenkomplex heißt hüllenfinit, wenn jede Zelle in einem endlichen Teilkomplex liegt. Jede Zelle der Zerlegung b) liegt nach c) in einer Zelle $e^r \times {}'e^s$. Diese liegt in einem endlichen Teilkomplex Y von $|K| \otimes |K'|$ bezüglich der ursprünglichen CW-Zerlegung. Nach c) ist Y auch endlicher Teilkomplex bezüglich der Zerlegung b), also ist die Zellenzerlegung b) hüllenfinit.

Ein Zellenkomplex trägt die schwache Topologie, wenn eine Teilmenge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Durchschnitt mit der abgeschlossenen Hülle jeder Zelle abgeschlossen ist. Ist $A \subset |K| \otimes |K'|$ abgeschlossen, so offenbar auch $A \cap \overline{{}''e^q}$ für jede Zelle ${}''e^q$ der Zerlegung b). Ist umgekehrt $A \cap \overline{{}''e^q}$ für jedes ${}''e^q$ abgeschlossen, so ist auch

$$\bigcup_{{}''e^q \subset e^r \times {}'e^s} A \cap \overline{{}''e^q} = A \cap (\overline{e^r} \times \overline{{}'e^s})$$

für jedes $e^r \times {}'e^s \subset |K| \otimes |K'|$ abgeschlossen, da $e^r \times {}'e^s$ nach c) nur endlich viele ${}''e^q$ enthält. Nach Definition der Topologie in $|K| \otimes |K'|$ (vgl. 2.4) folgt daraus, daß A abgeschlossen ist. Damit ist gezeigt, daß $|K| \otimes |K'|$ die schwache Topologie bezüglich der Zerlegung b) trägt.]

$|K| \otimes |K'|$ mit der Zerlegung b) besitzt also tatsächlich alle Eigenschaften eines CW-Komplexes. c) zeigt zugleich, daß dieser CW-Komplex eine Unterteilung der ursprünglichen CW-Zerlegung von $|K| \otimes |K'|$ ist, und aus a) und b) geht hervor, daß er den CSS-Komplex $K \times K'$ vermöge der CSS-Abbildung i geometrisch realisiert. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Aus Satz 5 folgt für drei CSS-Komplexe K, K', K''

$$|K \times K' \times K''| = |K \times K'| \otimes |K''| = |K| \otimes |K'| \otimes |K''|,$$

und die Einbettung $K \times K' \times K'' \subset S(|K| \otimes |K'| \otimes |K''|)$ ist offenbar [vgl. (2)] durch

$$(a, a', a'')(t) = \big((a, a')(t), a''(t)\big) = \big(a(t), a'(t), a''(t)\big),$$
$$t \in \Delta_q,\ (a, a', a'') \in K_q \times K'_q \times K''_q, \qquad q = 0, 1, \ldots$$

gegeben. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu

Folgerung A. *Sind* ${}^1K, {}^2K, \ldots, {}^nK$ *CSS-Komplexe, so läßt sich* ${}^1K \times \cdots \times {}^nK$ *so durch* $|{}^1K| \otimes \cdots \otimes |{}^nK|$ *(mit einer geeigneten CW-Zerlegung, die die ursprüng-*

liche von 2.4 unterteilt) geometrisch realisieren, daß für alle

$$(a_1, \ldots, a_n) \in {}^1K_q \times \cdots \times {}^nK_q \subset S_q(|{}^1K| \otimes \cdots \otimes |{}^nK|), \qquad q = 0, 1, \ldots$$

gilt

$$(a_1, \ldots, a_n)(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)), \qquad t \in \Delta_q. \tag{4}$$

Um später darauf zurückgreifen zu können, heben wir noch hervor:

Folgerung B. *K sei ein CSS-Komplex. Zu jedem System $x_1, \ldots, x_n \in |K|$ von endlich vielen Punkten gibt es ein System $a_1, \ldots, a_n \in K_q \subset S_q(|K|)$ (für ein geeignetes q) und einen Punkt $t \in \Delta_q$ (der nicht von j abhängt), so daß $a_j(t) = x_j$ ist.*

Beweis. Wir fassen $(x_1, \ldots, x_n)$ als Punkt von $|K| \otimes \cdots \otimes |K| = |K \times \cdots \times K|$ auf. Dann gibt es nach Definition des Begriffs der geometrischen Realisierung (s. 2.1) ein $(a_1, \ldots, a_n) \in K_q \times \cdots \times K_q \subset S_q(|K| \otimes \cdots \otimes |K|)$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \in (a_1, \ldots, a_n)(\Delta_q)$, also $x_j = a_j(t)$ für ein $t \in \Delta_q$ [vgl. (4)].

2.6. Geometrische Realisierung von CSS-Gruppen. Eine *mit der CSS-Struktur verträgliche Verknüpfung* in einem CSS-Komplex K ist eine CSS-Abbildung $v: K \times K \to K$. (Beispiel: Die Gruppenoperation in einer CSS-Gruppe K.) Sie induziert eine stetige Abbildung

$$|v|: |K| \otimes |K| = |K \times K| \to |K|$$

(vgl. 2.3 und 2.5 Satz 5). Das ist eine Verknüpfung in $|K|$, die zwar im allgemeinen als solche nicht stetig ist — dazu müßte $|v|: |K| \times |K| \to |K|$ stetig sein —, die aber wegen 2.4 B. auf kompakten Teilmengen von $|K| \times |K|$ stetig ist (vgl. 1.2 Beispiel 1). Falls K ein abzählbarer CSS-Komplex ist (d.h. abzählbar viele Elemente besitzt), ist sie dagegen wegen 2.4 A. sogar schlechthin stetig. Nach Definition von $|v|$ [vgl. 2.3 (4)] gilt für jedes

$$(a, a') \in K_q \times K_q \subset S_q(|K| \otimes |K|)$$
$$|v|((a, a')(t)) = v(a, a')(t), \qquad t \in \Delta_q$$

und unter Beachtung von 2.5 (2)

$$|v|(a(t), a'(t)) = v(a, a')(t), \qquad t \in \Delta_q. \tag{1}$$

Diese Gleichung charakterisiert die Verknüpfung in $|K|$, da sich jedes Punktepaar $x, x' \in |K|$ in der Form $x = a(t)$, $x' = a(t)$ mit dem gleichen $t \in \Delta_q$ schreiben läßt (s. 2.5 Folgerung B).

Die Verknüpfungen $v: K \times K \to K$, die im folgenden vorkommen, werden entweder multiplikativ: $v(a, a') = a \cdot a'$, oder additiv: $v(a, a') = a + a'$, geschrieben werden; entsprechend $|v|(x, x') = x \cdot x'$ bzw. $|v|(x, x') = x + x'$. Dann haben wir an Stelle von (1)

$$(a \cdot a')(t) = a(t) \cdot a'(t), \qquad t \in \Delta_q \tag{2}$$

bzw.

$$(a + a')(t) = a(t) + a'(t), \qquad t \in \Delta_q. \tag{3}$$

Für den Rest dieses Abschnitts benutzen wir die multiplikative Schreibweise.

Viele Eigenschaften der Verknüpfung v in K übertragen sich auf die Verknüpfung $|v|$ in $|K|$:

A. *Ist v assoziativ, so auch $|v|$.*

Beweis. Für jedes Tripel $x, x', x'' \in |K|$ gibt es nach 2.5 Folgerung B ein Tripel $a, a', a'' \in K_q$ und ein $t \in \Delta_q$, so daß $x = a(t)$, $x' = a'(t)$, $x'' = a''(t)$ ist. Die Gleichung $(x \cdot x') \cdot x'' = x \cdot (x' \cdot x'')$ folgt nun unmittelbar aus (2) und der Assoziativität von v.

Ganz entsprechend ergibt sich:

B. *Ist v kommutativ, so auch $|v|$.*

Wir sagen, daß die Verknüpfung v ein *neutrales Element* besitzt, wenn es ein $e_0 \in K_0$ gibt, so daß für jedes q und jedes $a \in K_q$ gilt: $e_q \cdot a = a$ und $a \cdot e_q = a$ mit $e_q = (s_0)^q e_0$. $e \in |K|$ heißt neutrales Element für $|v|$, wenn $e \cdot x = x$ und $x \cdot e = x$ für jedes $x \in |K|$ gilt.

C. *Besitzt v ein neutrales Element, so auch $|v|$.*

Beweis. Wir setzen $e = e_0(\Delta_0)$; dann ist auch $e = e_q(t)$ für alle $t \in \Delta_q$, also ist für jedes $a \in K_q$

$$\begin{aligned} e \cdot a(t) &= e_q(t) \cdot a(t) = (e_q \cdot a)(t) \quad \text{nach (2)} \\ &= a(t) \quad \text{nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Da sich jedes $x \in |K|$ in der Form $x = a(t)$ schreiben läßt, folgt $e \cdot x = x$ für alle $x \in |K|$. Ebenso erhält man $x \cdot e = x$.

v sei eine Verknüpfung in K, die ein neutrales Element besitzt. $\bar{a} \in K_q$ heißt invers zu $a \in K_q$ bezüglich v, wenn $\bar{a} \cdot a = e_q$ und $a \cdot \bar{a} = e_q$ ist. Entsprechend ist der Begriff des inversen Elements bezüglich $|v|$ definiert.

D. *v sei eine Verknüpfung mit neutralem Element. Besitzt jedes Element von K ein Inverses bezüglich v, so besitzt auch jedes Element von $|K|$ ein Inverses bezüglich $|v|$.*

Beweis. Aus $\bar{a} \cdot a = e_q$ und $a \cdot \bar{a} = e_q$ folgt nach (2) $\bar{a}(t) \cdot a(t) = e_q(t) = e$ (vgl. den Beweis zu C.) und ebenso $a(t) \cdot \bar{a}(t) = e$, also ist $\bar{a}(t)$ invers zu $a(t)$. In der Form $x = a(t)$ läßt sich aber jeder Punkt $x \in |K|$ schreiben.

Ist K eine (abelsche) CSS-Gruppe, so sind die Voraussetzungen und daher auch die Behauptungen von A., (B.,) C. und D. erfüllt, wenn man für v die Gruppenoperation nimmt. Folglich ist $|K|$ eine (abelsche) Gruppe mit der Gruppenoperation $|v|$. In diesem Fall gibt es zu jedem $a \in K_q$, $q = 0, 1, \ldots$, sogar ein eindeutig bestimmtes Inverses a^{-1}, und die Festsetzung $ua = a^{-1}$ definiert eine CSS-Abbildung $u: K \to K$. Der Beweis von D. zeigt, daß $a^{-1}(t)$ für jedes $t \in \Delta_q$ in $|K|$ zu $a(t)$ invers ist, d.h.

$$a^{-1}(t) = (a(t))^{-1}. \tag{4}$$

Bei additiver Schreibweise würde die entsprechende Gleichung lauten:

$$(-a)(t) = -a(t). \tag{5}$$

Aus der Definition der induzierten Abbildung [vgl. 2.3 (4)] folgt $|u|(a(t)) = (ua)(t) = a^{-1}(t)$, also wegen (4): $|u|(a(t)) = (a(t))^{-1}$, d.h. der Übergang zum

Inversen in $|K|$ ist die stetige Abbildung $|u|$. Zusammenfassend können wir daher feststellen:

Satz 6. *Ist K eine (abelsche) CSS-Gruppe, so wird in $|K|$ eine (abelsche) Gruppenstruktur induziert. Der Übergang zum Inversen ist stetig; die Gruppenmultiplikation ist stetig auf kompakten Teilmengen von $|K|\times|K|$, d.h. $|K|$ ist eine (abelsche) C-Gruppe (vgl. 1.2 Beispiel 1). Ist K abzählbar, so ist $|K|$ sogar eine (abelsche) topologische Gruppe.*

2.7. Die Isomorphie der Homologiegruppen eines CSS-Komplexes und seiner geometrischen Realisierung. $L\subset K$ (L darf leer sein) sei ein Paar von CSS-Komplexen, $|L|\subset|K|$ das entsprechende Paar ihrer geometrischen Realisierungen (vgl. 2.3 D.). Nach 1.4 haben wir einerseits die Homologiegruppen

$$H_q(K,L)=\mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L),$$

andererseits die singulären Homologiegruppen

$$H_q(|K|,|L|)=H_q\big(S(|K|),S(|L|)\big)=\mathfrak{H}_q\big(\Gamma S(|K|)/\Gamma S(|L|)\big).$$

Satz 7. *Der durch die natürliche Injektion $i\colon K\to S(|K|)$ induzierte Homomorphismus (vgl. 1.5)*

$$i_H\colon H_q(K,L)\to H_q\big(S(|K|),S(|L|)\big)=H_q(|K|,|L|)$$

ist ein Isomorphismus für alle q.

Wir benutzen zum Beweis dieses Satzes den Begriff des normalisierten Komplexes K_N einer abelschen CSS-Gruppe K im Sinne von Eilenberg-MacLane [5] § 4. (Wie schon in 1.2 bemerkt, ist eine abelsche CSS-Gruppe dasselbe wie ein FD-Komplex in [5].) $D_q(K)$ sei die von den ausgearteten Elementen von K_q erzeugte Untergruppe von K_q. Für jedes ausgeartete $a=s_ja'\in K_q$ gilt

$$\begin{aligned}da&=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i d_i s_j a'\\&=\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i s_{j-1}d_i a'+(-1)^j a'+(-1)^{j+1}a'+\\&\qquad+\sum_{i=j+2}^{q}(-1)^i s_j d_{i-1}a' \qquad \text{nach 1.1 (Vt), S. 371}\\&=s_{j-1}\Big(\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i d_i a'\Big)+s_j\Big(\sum_{i=j+2}^{q}(-1)^i d_{i-1}a'\Big)\in D_{q-1}(K).\end{aligned}$$

Die $D_q(K)$ bilden also einen Unterkomplex $D(K)$ des Kettenkomplexes (K,d). Folglich ist auch $K/D(K)$ ein Kettenkomplex. Man nennt ihn den *normalisierten Komplex* K_N von K.

Beweis von Satz 7. Wir bilden den normalisierten Komplex $(\Gamma K/\Gamma L)_N$ der abelschen CSS-Gruppe $\Gamma K/\Gamma L$. Nach Eilenberg-MacLane [5] Th. 4.1 induziert die natürliche Projektion $\Gamma K/\Gamma L\to(\Gamma K/\Gamma L)_N$ Isomorphismen der

Homologiegruppen $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) \to \mathfrak{H}_q((\Gamma K/\Gamma L)_N)$. Andererseits ist $(\Gamma K/\Gamma L)_N$ nichts anderes als der Komplex der Zellenketten von $|K| \bmod |L|$, dessen Homologiegruppen mit den singulären Homologiegruppen von $|K| \bmod |L|$ in natürlicher Weise isomorph sind. Obwohl letzteres bekannt ist, scheint keine ausführliche Darstellung in der Literatur zu existieren. Wir müssen daher noch etwas genauer darauf eingehen und folgen dabei im wesentlichen einer Vorlesung von SEIFERT:

X sei ein CW-Komplex. Mit $X^{(q)}$ bezeichnen wir das q-dimensionale Gerüst, d.h. die Vereinigung aller Zellen, deren Dimension $\leq q$ ist. Unter dem Träger $|\sigma|$ eines singulären Simplexes $\sigma: \Delta_q \to X$ versteht man die Punktmenge $\sigma(\Delta_q)$, unter dem Träger $|c|$ einer singulären Kette $c = \sum_i n_i \sigma_i$ die Vereinigung $\bigcup_{n_i \neq 0} |\sigma_i|$. $N_q \subset \Gamma_q S(X)$ sei die Menge derjenigen singulären Ketten c, die den Bedingungen

$$|c| \subset X^{(q)}, \qquad |dc| \subset X^{(q-1)}$$

genügen. N_q ist eine Untergruppe von $\Gamma_q S(X)$, und alle N_q zusammen bilden offenbar einen Unterkomplex N des Kettenkomplexes $\Gamma S(X)$. Jedes $c \in N_q$ besitzt über jeder q-Zelle e^q von X einen Grad (dessen Vorzeichen nach Wahl einer Orientierung von e^q bestimmt ist), c repräsentiert nämlich ein Element von

$$H_q(X^{(q)}, X^{(q)} - e^q) \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q)} - x) \qquad (x \in e^q)$$
$$\cong H_q(e^q, e^q - x) \cong \Gamma \qquad (= \text{Gruppe der ganzen Zahlen}).$$

Hilfssatz (Ausfegungssatz). *Sei $X^{(n)}$ ein n-dimensionaler CW-Komplex ($n > 0$), e^n eine seiner n-Zellen und $c \in \Gamma_q S(X^{(n)})$ eine q-Kette, deren Rand dc auf $X^{(n-1)}$ liegt (d. h. $|dc| \subset X^{(n-1)}$). Wenn $q \neq n$ ist, oder wenn $q = n$ und der Grad von c über e^n gleich 0 ist, so gibt es eine zu c homologe Kette c', die in $X^{(n)} - e^n$ liegt.*

Beweis. Die Behauptung besagt, daß c das Nullelement von $H_q(X^{(n)}, X^{(n)} - e^n)$ repräsentiert. Für $q \neq n$ ist das klar, weil

$$H_q(X^{(n)}, X^{(n)} - e^n) \cong H_q(X^{(n)}, X^{(n)} - x) \qquad (x \in e^n)$$
$$\cong H_q(e^n, e^n - x) = 0$$

ist. Für $q = n$ ist es nach der obigen Definition mit dem vorausgesetzten Verschwinden des Grades von c über e^n äquivalent.

Aus dem Hilfssatz folgt leicht:

A. *Die Injektion $j: N \to \Gamma S(X)$ induziert Isomorphismen der Homologiegruppen.*

Beweis. Wir werden zeigen, daß es zu jedem $c \in \Gamma S(X)$ mit $dc \in N$ ein homologes $c' \in N$ gibt. Dann ist insbesondere jeder Zykel (d.h. Element aus Kern d) von $\Gamma S(X)$ einem Zykel aus N homolog [Epimorphie[2])]; und ist $c = d\tilde{c} \in N$, $\tilde{c} \in \Gamma S(X)$, so braucht man nur $\tilde{c}$ durch eine homologe Kette

$\tilde{c}' \in N$ zu ersetzen, um zu sehen, daß $c = d\tilde{c} - d\tilde{c}'$ auch in N nullhomolog ist [Monomorphie²)].

Sei nun $c \in \Gamma_q S(X)$ und $dc \in N$, also $|dc| \subset X^{(q-1)}$. Weil $|c|$ kompakt ist, liegt es bereits in einem endlichen Teilkomplex Y von X (vgl. WHITEHEAD [13] § 5 (D)). Sei n die Dimension von Y und $e_1^n \subset Y$ eine n-Zelle. Ist $n > q$, so gibt es nach dem Hilfssatz eine Kette $c_1 \sim c$ ($\sim$ bedeutet: homolog) mit $|c_1| \subset Y - e_1^n$. Analog findet man für $e_2^n \subset Y - e_1^n$ eine Kette $c_2 \sim c_1$ mit $|c_2| \subset Y - e_1^n - e_2^n$. In dieser Weise fortfahrend, kann man c erst aus allen n-Zellen von Y, dann (falls auch $n - 1 > q$ ist) aus allen $(n-1)$-Zellen usw. „ausfegen", bis man zu $c' \sim c$ gelangt mit $|c'| \subset Y^{(q)} \subset X^{(q)}$. Aus $c' \sim c$ folgt $dc' = dc$, also $|dc'| = |dc| \subset X^{(q-1)}$. Folglich ist $c' \in N$, und A. ist bewiesen.

$\overset{\circ}{N}_q \subset N_q$ sei die Menge derjenigen Ketten, deren Grad über allen q-Zellen von X verschwindet. $\overset{\circ}{N}_q$ ist offenbar eine Untergruppe von N_q. Wir wollen zeigen, daß die $\overset{\circ}{N}_q$ einen Unterkomplex $\overset{\circ}{N}$ des Kettenkomplexes N bilden: Sei $c \in \overset{\circ}{N}_q$. Wegen $c \in N$ liegt $|c|$ in $X^{(q)}$ und $|dc|$ in $X^{(q-1)}$. Als kompakte Menge liegt $|c|$ in einem endlichen Teilkomplex $Y^{(q)}$ von $X^{(q)}$ (vgl. [13] § 5 (D)). Weil der Grad von c über jeder q-Zelle von $Y^{(q)}$ nach Voraussetzung verschwindet, läßt sich c nach dem Hilfssatz sukzessiv aus allen diesen q-Zellen ausfegen, und man erhält eine Kette $c' \sim c$ mit $|c'| \subset Y^{(q-1)} \subset X^{(q-1)}$. Dann ist aber insbesondere $dc = dc'$, dc ist also in $X^{(q-1)}$ nullhomolog. Erst recht repräsentiert dc das Nullelement von $H_{q-1}(X^{(q-1)}, X^{(q-1)} - e^{q-1})$ für jede $(q-1)$-Zelle e^{q-1}, d.h. $dc \in \overset{\circ}{N}_{q-1}$.

B. *Alle Homologiegruppen von $\overset{\circ}{N}$ verschwinden.*

Beweis. Sei $q > 0$ und $c \in N_q$ ein Zykel. $|c|$ liegt in einem endlichen Teilkomplex $Y^{(q)} \subset X^{(q)}$. Ist e_1^q eine q-Zelle von $Y^{(q)}$, so gibt es nach dem Hilfssatz (weil der Grad von c über e_1^q verschwindet) ein $c_1 \sim c$ mit $|c_1| \subset Y^{(q)} - e_1^q$. Analog findet man für $e_2^q \subset Y^{(q)} - e_1^q$ ein $c_2 \sim c_1$ mit $|c_2| \subset Y^{(q)} - e_1^q - e_2^q$. In dieser Weise fortfahrend, kann man c erst aus allen q-Zellen von $Y^{(q)}$, dann (falls $q - 1 > 0$ ist) aus allen $(q-1)$-Zellen usw. „ausfegen", bis man zu $c' \sim c$ gelangt mit $|c'| \subset Y^{(0)}$. Alle diese Homologien bestehen in $Y^{(q)}$. Wegen $q > 0$ ist $c' \sim 0$ in $Y^{(0)}$, also $c \sim 0$ in $Y^{(q)}$, d.h. es gibt eine $(q+1)$-Kette $\tilde{c}$ mit $|\tilde{c}| \subset Y^{(q)}$ und $d\tilde{c} = c$. Daraus folgt aber $\tilde{c} \in \overset{\circ}{N}_{q+1}$, d.h. c ist auch in $\overset{\circ}{N}$ nullhomotop.

Damit ist $\mathfrak{H}_q(\overset{\circ}{N}) = 0$ für $q > 0$ gezeigt. Für $q = 0$ ist sogar $\overset{\circ}{N}_0 = 0$.

Aus B. und der Exaktheit der Homologiefolge (vgl. EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. V Th. 3.7)

$$\dots \mathfrak{H}_q(\overset{\circ}{N}) \to \mathfrak{H}_q(N) \to \mathfrak{H}_q(N/\overset{\circ}{N}) \to \mathfrak{H}_{q-1}(\overset{\circ}{N}) \to \cdots$$

ergibt sich sofort:

C. *Die Projektion $p: N \to N/\overset{\circ}{N}$ induziert Isomorphismen der Homologiegruppen.*

Ordnet man einem $c \in N_q$ die „Zellenkette" $\sum_i n_i e_i^q$ zu, wobei e_i^q die q-Zellen von X durchläuft und n_i der Grad von c über e_i^q ist (nach Wahl einer Orientierung von e_i^q), so erhält man einen Epimorphismus von N_q auf die Gruppe der Zellenketten, dessen Kern gerade $\overset{\circ}{N}_q$ ist. Es ist daher gerechtfertigt, $N/\overset{\circ}{N}$ als Komplex der Zellenketten zu bezeichnen. Aus A. und C. geht hervor, daß man die Homologiegruppen von X aus diesen Zellenketten berechnen kann.

Nun kehren wir zum Beweis von Satz 7 zurück und setzen $X = |K|$. ΓK wird durch $\Gamma i: \Gamma K \to \Gamma S(|K|)$ in den Unterkomplex N abgebildet. Wir können daher Γi aus einer Kettenabbildung $f: \Gamma K \to N$ und der Injektion $j: N \to \Gamma S(|K|)$ zusammensetzen und erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{j}{\nearrow} & \Gamma S(|K|) \\ \Gamma K & \xrightarrow{f} & N & & \\ & & & \underset{p}{\searrow} & N/\overset{\circ}{N} \end{array}$$

Jedes nicht ausgeartete $b \in K_q$ hat, aufgefaßt als Element von $N_q \subset \Gamma_q S(|K|)$, den Grad ± 1 über der Zelle $b(\overset{\circ}{\Delta}_q)$ und den Grad 0 über allen anderen q-Zellen. Für jedes ausgeartete $a \in K_q$ ist $a(\Delta_q) \subset |K|^{(q-1)}$, also liegt a, aufgefaßt als Element von N_q, in $\overset{\circ}{N}$. Daraus entnimmt man leicht, daß $p \circ f$ eine Abbildung auf $N/\overset{\circ}{N}$ ist, bei der gerade die Elemente von ΓK in 0 übergehen, die sich als Summen von ausgearteten Elementen darstellen lassen, d. h. Kern $p \circ f = D(\Gamma K)$, also setzt sich $p \circ f$ aus der natürlichen Projektion

$$\Gamma K \to \Gamma K / D(\Gamma K) = (\Gamma K)_N$$

auf den normalisierten Komplex und einem Isomorphismus $(\Gamma K)_N \cong N/\overset{\circ}{N}$ zusammen. $p \circ f$ induziert daher Isomorphismen der Homologiegruppen (nach [5] Th. 4.1). Nach C. induziert p Isomorphismen und daher auch f. Schließlich induziert j Isomorphismen (vgl. A.) und folglich auch $j \circ f = \Gamma i$. Satz 7 ist damit für den Fall bewiesen, daß L leer ist. Der allgemeine Fall folgt nun aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(L) & \to & H_q(K) & \to & H_q(K, L) & \to & H_{q-1}(L) & \to & H_{q-1}(K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_q(|L|) & \to & H_q(|K|) & \to & H_q(|K|, |L|) & \to & H_{q-1}(|L|) & \to & H_{q-1}(|K|) \end{array}$$

durch Anwendung des Fünferlemmas (vgl. [6] Chapt. I Lemma 4.3), das besagt: Wenn in einem kommutativen Diagramm der obigen Art die Zeilen exakt sind, und wenn alle vertikalen Homomorphismen bis eventuell auf den mittleren Isomorphismen sind, so ist auch der mittlere ein Isomorphismus.

2.8. Die Isomorphie der Homotopiegruppen einer CSS-Gruppe und ihrer geometrischen Realisierung.

Satz 8. *Ist K eine abelsche CSS-Gruppe, so ist der durch die Injektion $i: K \to S(|K|)$ induzierte Homomorphismus*

$$i_\pi: \pi_q(K) \to \pi_q(S(|K|)) = \pi_q(|K|, e)$$

ein Isomorphismus für alle q.

[Dabei ist $|K|$ eine abelsche C-Gruppe gemäß 2.6 Satz 6, e ihr neutrales Element, und $S(|K|)$ ist eine abelsche CSS-Gruppe nach 1.2 Beispiel 1.]

Beweis. E sei wie in 1.6 der aus den neutralen Elementen $e_q \in K_q$ bestehende CSS-Unterkomplex von K. Offenbar ist $|E| = e \in |K|$ (vgl. 2.6 C.). Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(K) & \xrightarrow{i_\pi} & \pi_q(S(|K|)) \\ {\scriptstyle g_*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle h_*} & & {\scriptstyle g'_*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle h'_*} \\ H_q(K, E) & \xrightarrow{i_H} & H_q(S(|K|), S(e)). \end{array}$$

h_*, h'_* sind dabei die Hurewiczschen Abbildungen (vgl. 1.6) und g_*, g'_* die natürlichen Homomorphismen der Homologie- in die Homotopiegruppen, wie sie in 1.7 für jede abelsche CSS-Gruppe definiert wurden. Das Diagramm ist kommutativ, sowohl wenn man h_*, h'_* als auch wenn man g_*, g'_* als „vertikale" Abbildungen benutzt. i_H ist nach 2.7 Satz 7 ein Isomorphismus. Nach 1.7 Satz 3 Folgerung A ist h_* monomorph (einwertig für $q = 0$) und g'_* epimorph, also ist auch

$h'_* \circ i_\pi = i_H \circ h_*$ monomorph (einwertig für $q = 0$) und $i_\pi \circ g_* = g'_* \circ i_H$ epimorph.

Daraus folgt, daß i_π monomorph und epimorph zugleich ist, d.h. es ist ein Isomorphismus.

Bemerkung. Milnor hat die Isomorphie von Satz 8 für alle CSS-Komplexe K bewiesen, die der Kanschen Bedingung genügen (vgl. Kan [9] III 5.1), insbesondere also für alle (eventuell nicht abelschen) CSS-Gruppen (vgl. Moore [11] Exp. 18 Th. 3). Abgesehen von einer Beweisskizze in den Princeton seminar notes [vgl. Fußnote [3]), S. 369] ist jedoch m.W. bisher kein Beweis veröffentlicht[7b].

2.9. Der Isomorphismus $H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|)$. Sei K ein CSS-Komplex und $L \subset K$ ein (eventuell leerer) CSS-Unterkomplex. Dann bestehen die Isomorphismen:

(1) $H_q(K, L) \cong H_q(|K|, |L|)$ nach 2.7 Satz 7,

(2) $\pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0)$ nach 2.8 Satz 8,

(3) $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L) \cong \pi_q(\Gamma K/\Gamma L)$ nach 1.4 Satz 2 Folgerung A.

$\Gamma K = \bigcup_q \Gamma_q K$ ist dabei die von K erzeugte freie abelsche CSS-Gruppe (vgl. 1.4); für leeres L ist $\Gamma_q L = 0$ für jedes q. Da $\Gamma K/\Gamma L$ immer additiv geschrieben wurde, bezeichnen wir das neutrale Element der abelschen C-Gruppe $|\Gamma K/\Gamma L|$ (vgl. 2.6 Satz 6) mit 0. Aus (1) bis (3) folgt

(4) $$H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0),$$

und da uns die Isomorphismen (1) bis (3) im einzelnen bekannt sind, kennen wir auch hier einen ganz bestimmten (natürlichen) Isomorphismus. Wir untersuchen ihn noch etwas genauer mit dem Ziel, ihn mehr geometrisch,

[7b]) *Zusatz bei der Korrektur:* Die Arbeit von Milnor ist inzwischen erschienen: Ann. of Math. **65**, 357–362 (1957).

d.h. möglichst ohne Bezug auf die CSS-Komplexe sondern nur auf die Räume $|K|, |L|, |\Gamma K/\Gamma L|$ zu definieren:

Sei $f\colon K \to \Gamma K/\Gamma L$ die Zusammensetzung aus Injektion $K \to \Gamma K$ und Projektion $\Gamma K \to \Gamma K/\Gamma L$. $E \subset \Gamma K/\Gamma L$ sei der aus den neutralen Elementen $0_q \in \Gamma_q K/\Gamma_q L$ bestehende CSS-Unterkomplex. Dann ist offenbar $|E| = 0 \in |\Gamma K/\Gamma L|$ (vgl. 2.6 C.). Wegen $f(L) \subset E$ induziert f (vgl. 1.5) einen Homomorphismus $f_H\colon H_q(K, L) \to H_q(\Gamma K/\Gamma L, E)$. Wir behaupten:

Die Zusammensetzung

$$H_q(K, L) \xrightarrow{f_H} H_q(\Gamma K/\Gamma L, E) \xrightarrow{g_*} \pi_q(\Gamma K/\Gamma L)$$

von f_H mit dem natürlichen Homomorphismus g_* (vgl. 1.7) stimmt mit dem Isomorphismus (3) überein.

Beweis. Nach Definition ist $H_q(K, L) = \mathfrak{H}_q(\Gamma K/\Gamma L)$, $H_q(\Gamma K/\Gamma L, E) = \mathfrak{H}_q\big(\Gamma(\Gamma K/\Gamma L)/\Gamma E\big)$ (vgl. 1.4). Die Elemente von $\Gamma_q K$ sind die formalen Summen $\sum_i n_i a_i$, $a_i \in K_q$; entsprechendes gilt für $\Gamma_q(\Gamma K/\Gamma L)$, um aber Verwechslungen mit der Addition in $\Gamma K/\Gamma L$ zu vermeiden, versehen wir hier die formalen Summen mit einem Strich, d.h. die Elemente von $\Gamma_q(\Gamma K/\Gamma L)$ sind $\sum_i' n_i \bar{c}_i$, $\bar{c}_i \in \Gamma_q K/\Gamma_q L$. Nun sei $c = \sum_i n_i a_i \in \Gamma_q K$, $a_i \in K_q$, und die Restklasse $\bar{c} \in \Gamma_q K/\Gamma_q L$ von c repräsentiere $\alpha \in H_q(K, L)$. Nach 1.4 Satz 2 Folgerung D können wir annehmen, daß $d_i \bar{c} = 0$ ist für alle j. $f_H(\alpha) \in H_q(\Gamma K/\Gamma L, E)$ wird durch die Restklasse (mod $\Gamma_q E$) von $\sum_i' n_i \cdot f a_i \in \Gamma_q(\Gamma K/\Gamma L)$ repräsentiert. Nach der in 1.7 gegebenen Vorschrift zur Bestimmung von g_* (S. 381) — hier werden lediglich die Gruppenoperationen etwas anders geschrieben — ist dann $\sum_i n_i \cdot f a_i$ (Summation in $\Gamma K/\Gamma L$) ein Repräsentant von $g_* f_H(\alpha)$. $f a_i$ ist nach Definition die Restklasse von $a_i \in K_q \subset \Gamma_q K$ in $\Gamma_q K/\Gamma_q L$, also ist $\sum_i n_i \cdot f a_i$ die Restklasse $\bar{c}$ von $c = \sum_i n_i a_i$. Wir haben damit gezeigt, daß $\bar{c}$ sowohl α als auch $g_* f_H(\alpha)$ repräsentiert, und das beweist die Behauptung.

Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_q(K, L) & \xrightarrow{f_H} & H_q(\Gamma K/\Gamma L, E) & \xrightarrow{g_*} & \pi_q(\Gamma K/\Gamma L) \\ \downarrow{\scriptstyle i_H} & & \downarrow{\scriptstyle i'_H} & & \downarrow{\scriptstyle i'_\pi} \\ H_q\big(|K|, |L|\big) & \xrightarrow{|f|_H} & H_q\big(|\Gamma K/\Gamma L|, 0\big) & \xrightarrow{g'_*} & \pi_q\big(|\Gamma K/\Gamma L|, 0\big), \end{array}$$

worin g'_* analog zu g_* der natürliche Homomorphismus von 1.7 ist und $i\colon K \to S\big(|K|\big)$, $i'\colon \Gamma K/\Gamma L \to S\big(|\Gamma K/\Gamma L|\big)$ die Injektionen sind. Die senkrechten Abbildungen des Diagramms sind also die Isomorphismen von 2.7 Satz 7 und 2.8 Satz 8. Das Diagramm ist kommutativ: Das rechte Quadrat wegen der Natürlichkeit von g_* (vgl. 1.7) und das linke wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \Gamma K/\Gamma L \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ S\big(|K|\big) & \xrightarrow{|f|} & S\big(|\Gamma K/\Gamma L|\big) \end{array}$$

(Natürlichkeit von i), die sich unmittelbar aus der Definition von $|f|$ ergibt [vgl. 2.3 (4)]. Folglich gilt:

$$g'_* \circ |f|_H = i'_\pi \circ (g_* \circ f_H) \circ i_H^{-1},$$

und rechts stehen gerade die Isomorphismen (2), (3) und (1). Damit haben wir bewiesen:

Satz 9. *Zu jedem Paar von CSS-Komplexen $L \subset K$ gibt es eine abelsche C-Gruppe — nämlich $|\Gamma K/\Gamma L|$ — und eine (natürliche) stetige Abbildung $|K| \to |\Gamma K/\Gamma L|$ — nämlich $|f|$ —, so daß die Zusammensetzung*

$$H_q(|K|, |L|) \xrightarrow{|f|_H} H_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0) \xrightarrow{g_*} \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0)$$

von $|f|_H$ mit dem in 1.7 für jede abelsche C-Gruppe definierten Homomorphismus g_* ein Isomorphismus ist (für alle q).

Das Ziel, den Isomorphismus $H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(|\Gamma K/\Gamma L|, 0)$ „geometrisch" zu definieren, ist damit noch nicht ganz erreicht, denn bei der Definition von $|f|$ haben wir die CSS-Komplexe benutzt. Im nächsten Abschnitt werden wir uns davon noch befreien und auch für $|\Gamma K/\Gamma L|$ eine geometrische Interpretation geben (wenigstens für abzählbares K).

Bemerkung. In naheliegender Weise definiert man für eine abelsche CSS-Gruppe K und eine beliebige abelsche Gruppe G das tensorielle Produkt $K \otimes G = \bigcup_q K_q \otimes G$. Die Homologiegruppen mit Koeffizienten in G sind dann durch

$$H_q(K, L; G) = \mathfrak{H}_q((\Gamma K/\Gamma L) \otimes G)$$

gegeben. Die Isomorphie (1) läßt sich leicht auf den Fall beliebiger Koeffizientengruppen verallgemeinern. Ersetzt man ferner in (2) und (3) $\Gamma K/\Gamma L$ durch $(\Gamma K/\Gamma L) \otimes G$, so folgt daraus die Verallgemeinerung von (4):

$$H_q(|K|, |L|; G) \cong \pi_q(|(\Gamma K/\Gamma L) \otimes G|, 0).$$

2.10. Vergleich mit Ergebnissen von Dold und Thom. Mit $|\Gamma K/\Gamma L|$ haben wir im vorigen Abschnitt zu jedem Paar $L \subset K$ von CSS-Komplexen einen Raum gefunden, dessen Homotopiegruppen die Homologiegruppen von $|K|$ mod $|L|$ sind. Etwas Ähnliches haben auch Dold und Thom in [3], [4] durchgeführt. Für einen Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt l, dem sog. Grundpunkt, definieren sie erstens das unendliche symmetrische Produkt $SP(X)$, das algebraisch als das von der Menge $X - l$ erzeugte freie abelsche Monoid (Halbgruppe) mit neutralem Element (vgl. Bourbaki [1] §§ 1 und 2) aufgefaßt werden kann (vgl. Dold-Thom [3], [4]), und zweitens die von $X - l$ erzeugte freie abelsche Gruppe $AG(X)$ $(\supset SP(X))$ mit einer gewissen Topologie (vgl. Dold-Thom [4]). Ist X ein simplizialer Komplex, so gelten die Isomorphien

(1) $$H_q(X, l) \cong \pi_q(AG(X), 0) \quad \text{für alle } q \geq 0,$$

und, wenn X außerdem zusammenhängend ist,

(2) $$H_q(X) = H_q(X, l) \cong \pi_q(SP(X), 0) \quad \text{für } q > 0.$$

DOLD und THOM führen den Beweis, indem sie die Axiome eines gewissen Axiomensystems der Homologietheorie (einer Abwandlung des Axiomensystems von EILENBERG-STEENROD [6] Chapt. I) für die Gruppen $\pi_q(AG(X), 0)$ bzw. $\pi_q(SP(X), 0)$ verifizieren (und zwar mit Hilfe der Theorie der Faserungen und Quasifaserungen). Bei diesem Verfahren werden die Isomorphismen (1) und (2) durch den Eindeutigkeitssatz für Homologietheorie zwar festgelegt, sie sind aber nicht ohne weiteres (etwa unter Verwendung singulärer Ketten in X) explizit angebbar.

Wir werden nun CSS-Komplexe K *mit Grundpunkt* betrachten, d. h. wir zeichnen in K_0 ein Element l_0 aus und setzen $l_q = (s_0)^q l_0$. Dann bilden die Elemente l_q, $q = 0, 1, 2, \ldots$, einen CSS-Unterkomplex L von K, dessen geometrische Realisierung $|L|$ nur aus dem Punkt $l = l_0(\Delta_0) = l_q(\Delta_q) \in |K|$ (vgl. 2.3 D.) besteht. Wir betrachten ihn als den Grundpunkt von $|K|$. Man kann wie für topologische Räume ein unendliches symmetrisches Produkt $SP(K)$ definieren. Der freien abelschen Gruppe $AG(X)$ zu einem topologischen Raum X entspricht hier die abelsche CSS-Gruppe $\Gamma K/\Gamma L$, die wir zur Abkürzung mit $\bar{\Gamma}K$ bezeichnen. Es stellt sich heraus, daß $SP(|K|)$ und $AG(|K|)$ für abzählbares K geometrische Realisierungen von $SP(K)$ bzw. $\bar{\Gamma}K$ sind [s. (11), (12)]. Nach 2.9 (4) ist aber

$$H_q(|K|, l) \cong \pi_q(|\bar{\Gamma}K|, 0), \tag{3}$$

also haben wir damit die obige Isomorphie (1) für geometrische Realisierungen abzählbarer CSS-Komplexe, insbesondere für abzählbare simpliziale Komplexe (vgl. 2.1, Beispiel 1) neu bewiesen. Außerdem aber liefert 2.9 Satz 9 einen expliziten Isomorphismus $H_q(|K|, l) \to \pi_q(AG(|K|), 0)$ (vgl. Satz 10, S. 405). Im nächsten Paragraphen[8]) werden wir einen allgemeinen Satz über „CSS-Monoidkomplexe" bringen (3.6 Satz 13), aus dem speziell

$$\pi_q(|SP(K)|, 0) \cong \pi_q(|\bar{\Gamma}K|, 0)$$

folgt, falls $|K|$ zusammenhängend ist. Auf diese Weise ergibt sich aus (3)

$$H_q(|K|) = H_q(|K|, l) \cong \pi_q(|SP(K)|, 0), \quad q > 0. \tag{4}$$

Für abzählbares K ist das die Dold-Thomsche Isomorphie (2), die damit ebenfalls neu bewiesen ist. Auch bei (4) werden wir einen expliziten Isomorphismus angeben (3.7 Satz 15).

Zur Durchführung dieses Programms definieren wir zunächst $SP(K)$ für irgendeinen CSS-Komplex K mit Grundpunkt: In dem Produkt $(K)^n = K \times \cdots \times K$ (vgl. 2.5) operiert die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ der Permutationen von n Elementen durch Vertauschung der Faktoren. Identifizieren der bezüglich $\mathfrak{S}_n$ äquivalenten Elemente von $(K)^n$ ergibt das *n-fache symmetrische Produkt* $SP^n(K) = \bigcup_q SP^n_q(K)$. Die Elemente von $SP^n_q(K)$ sind die ungeordneten n-tupel $[a_1, \ldots, a_n]$, $a_i \in K_q$. Durch die Identifizierung

$$[a_1, \ldots, a] = [l_q, a_1, \ldots, a_n] \tag{5}$$

[8]) § 3 erscheint als Teil II im nächsten Heft dieser Zeitschrift.

[$l_q = (s_0)^q l_0$, $l_0 =$ „Grundpunkt" von K_0] erhält man eine Einbettung

$$SP^n(K) \subset SP^{n+1}(K). \tag{6}$$

Das *unendliche symmetrische Produkt* $SP(K)$ wird nun als der direkte Limes $\lim_{n\to\infty} SP^n(K)$ definiert. Darunter ist die Menge $\bigcup_n SP^n(K)$ zu verstehen zusammen mit derjenigen CSS-Struktur, die in $SP^m(K) \subset \bigcup_n SP^n(K)$ für jedes m mit der bereits definierten übereinstimmt.

$SP_q(K)$ sei der Bestandteil der Dimension q von $SP(K)$. Seine Elemente sind nach Konstruktion die ungeordneten unendlichen Folgen $[a_1, a_2, \ldots]$, $a_i \in K_q$, in denen nur endlich viele a_i von l_q verschieden sind. Eine solche ungeordnete Folge ist durch die in ihr vorkommenden Elemente aus $K_q - l_q$ mit den zugehörigen Vielfachheiten eindeutig bestimmt. Also kann man die Elemente von $SP_q(K)$ auch als formale Summen $\sum_j n_j b_j$, $b_j \in K_q - l_q$, $n_j \geq 0$, schreiben, indem man

$$\sum_j n_j b_j = [\underbrace{b_1, \ldots, b_1}_{n_1 \text{ mal}}, \underbrace{b_2, \ldots, b_2}_{n_2 \text{ mal}}, \ldots, l_q, l_q, \ldots]$$

setzt. Man entnimmt daraus, daß $SP_q(K)$ *das von* $K_q - l_q$ *erzeugte freie abelsche Monoid mit neutralem Element* ist. (Offenbar könnte man in $\sum_j n_j b_j$ auch $b_j = l_q$ zulassen, wenn man die Relation $l_q = 0$ einführt.) $\bar{\Gamma}_q K = \Gamma_q K / \Gamma_q L$ ($L = \{l_q\}$) ist die von $K_q - l_q$ erzeugte freie abelsche Gruppe mit den Elementen $\sum_j n_j b_j$, n_j beliebige ganze Zahl, $b_j \in K_q - l_q$ (oder $b_j \in K_q$ mit der Relation $l_q = 0$). Also gilt

$$SP(K) \subset \bar{\Gamma} K, \tag{7}$$

und man bestätigt leicht, *daß diese Inklusion mit den CSS-Strukturen verträglich ist.*

Bei der Untersuchung der geometrischen Realisierung von $SP(K)$, zu der wir nun kommen, setzen wir voraus, daß K abzählbar ist. $p_n : (K)^n \to SP^n(K)$ sei die natürliche Projektion, d.h.

$$p_n(a_1, \ldots, a_n) = [a_1, \ldots, a_n], \quad a_i \in K_q.$$

p_n induziert nach 2.3 eine stetige Abbildung $|p_n| : |(K)^n| \to |SP^n(K)|$. Nach 2.5 Folgerung A ist $|(K)^n| = |K| \otimes \cdots \otimes |K|$, und weil K abzählbar ist, nach 2.4 A. $|(K)^n| = |K| \times \cdots \times |K| = |K|^n$. Auch in $|K|^n$ operiert $\mathfrak{S}_n$ durch Vertauschung der Faktoren. Zwei Punkte von $|K|^n$ haben genau dann denselben Bildpunkt bei $|p_n|$, wenn sie durch eine geeignete Vertauschung der Faktoren von $|K|^n$ ineinander übergeführt werden können.

[Beweis. Nach Definition der geometrischen Realisierung (2.1) läßt sich jeder Punkt von $|(K)^n|$ eindeutig in der Form $b(t)$ schreiben, wobei b ein nicht ausgeartetes Element von $(K_q)^n$ und $t \in \mathring{\Delta}_q$ ist (mit geeignetem q). Entsprechend sei $b' \in (K_{q'})^n$ nicht ausgeartet und $t' \in \mathring{\Delta}_{q'}$. Nach Definition der induzierten

Abbildung (2.3) ist $|p_n|(b(t)) = |p_n|(b'(t'))$ mit $p_n b(t) = p_n b'(t')$ äquivalent. Sei $b = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in K_q$ und $b' = (a'_1, \ldots, a'_n)$, $a'_i \in K_{q'}$. Mit b und b' sind dann auch $p_n b = [a_1, \ldots, a_n]$ und $p_n b' = [a'_1, \ldots, a'_n]$ nicht ausgeartet; denn aus $[a_1, \ldots, a_n] = s_j[c_1, \ldots, c_n]$ würde folgen, daß die a_i bis auf die Reihenfolge mit den $s_j c_i$ übereinstimmen, d.h. $(a_1, \ldots, a_n) = s_j(c_{\varkappa(1)}, \ldots, c_{\varkappa(n)})$ für eine geeignete Permutation $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$. Also folgt aus $|p_n|(b(t)) = |p_n|(b'(t'))$: $q = q'$, $t = t'$ und $p_n b = p_n b'$, d.h. $[a_1, \ldots, a_n] = [a'_1, \ldots, a'_n]$, d.h. es gibt eine Permutation $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$, so daß $a'_i = a_{\varkappa(i)}$. In $|(K)^n| = |K|^n$ ist aber [vgl. 2.5 (4)]

$$b(t) = (a_1, \ldots, a_n)(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)),$$

also folgt: Der Punkt $b(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in |K|^n$ geht bei der Vertauschung $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$ in $b'(t') = (a'_1(t'), \ldots, a'_n(t'))$ über.

Umgekehrt ist für jeden Punkt

$$b(t) = (a_1, \ldots, a_n)(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)) \in |(K)^n| = |K|^n$$

und jedes $\varkappa \in \mathfrak{S}_n$:

$$|p_n|(a_1(t), \ldots, a_n(t)) = |p_n|(a_{\varkappa(1)}(t), \ldots, a_{\varkappa(n)}(t)),$$

denn

$$|p_n|(a_1(t), \ldots, a_n(t)) = |p_n|(b(t)) = p_n b(t) = [a_1, \ldots, a_n](t)$$

und

$$[a_1, \ldots, a_n] = [a_{\varkappa(1)}, \ldots, a_{\varkappa(n)}].$$

Weil p_n eine CSS-Abbildung auf $SP^n(K)$ ist, ist $|p_n|$ nach 2.3 E. eine Identifizierungsabbildung, d.h. man erhält $|SP^n(K)|$ aus $|K|^n$ durch Identifizieren der bezüglich $\mathfrak{S}_n$ äquivalenten Punkte. So wird aber gerade das n-fache symmetrische Produkt $SP^n(|K|)$ bei DOLD-THOM definiert, also gilt

$$|SP^n(K)| = SP^n(|K|) \tag{8}$$

und

$$|p_n|(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n], \qquad x_i \in |K|,$$

wenn $[x_1, \ldots, x_n]$ das ungeordnete n-tupel der x_i bezeichnet.

Für alle $[a_1, \ldots, a_n] \in SP^n_q(K) < S_q(SP^n(|K|))$, $q = 0, 1, \ldots$ gilt

$$[a_1, \ldots, a_n](t) = [a_1(t), \ldots, a_n(t)], \qquad t \in \Delta_q, \tag{9}$$

denn es ist [vgl. 2.3 (4) und 2.5 (4)]

$$\begin{aligned}[a_1, \ldots, a_n](t) &= p_n(a_1, \ldots, a_n)(t) = |p_n|((a_1, \ldots, a_n)(t)) \\ &= |p_n|(a_1(t), \ldots, a_n(t)) = [a_1(t), \ldots, a_n(t)].\end{aligned}$$

Der Einbettung (6) entspricht eine Einbettung $|SP^n(K)| < |SP^{n+1}(K)|$ (vgl. 2.3 D.) und wegen (8) also

$$SP^n(|K|) < SP^{n+1}(|K|). \tag{10}$$

Dabei ist

$$[x_1, \ldots, x_n] = [l, x_1, \ldots, x_n]$$

mit $l = l_0(\Delta_0) = l_q(\Delta_q) = |L|$, denn das n-tupel $x_1, \ldots, x_n$ läßt sich in der Form $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, $a_i \in K_q$, $t \in \Delta_q$, schreiben (vgl. 2.5 Folgerung B), und dann gilt wegen (5) und (9)

$$[a_1(t), \ldots, a_n(t)] = [a_1, \ldots, a_n](t) = [l_q, a_1, \ldots, a_n](t) = [l, a_1(t), \ldots, a_n(t)].$$

(10) ist demnach die gleiche Einbettung, die auch DOLD und THOM benutzen. Sie definieren das unendliche symmetrische Produkt als

$$SP(|K|) = \lim_{n \to \infty} SP^n(|K|)\ ^{9}).$$

Wegen (8) und weil die Einbettungen (6) und (10) einander entsprechen, stimmt das mit $\lim_{n \to \infty} |SP^n(K)|$ überein, was offenbar eine geometrische Realisierung von $\lim_{n \to \infty} SP^n(K) = SP(K)$ ist. Also gilt für jeden abzählbaren CSS-Komplex K

$$|SP(K)| = SP(|K|). \tag{11}$$

Analog wie bei $SP_q(K)$ kann man die Elemente von $SP(|K|)$ entweder als ungeordnete unendliche Folgen $[x_1, x_2, \ldots]$, $x_i \in |K|$, auffassen, in denen nur endlich viele x_i von l verschieden sind, oder als formale Summen $\sum_j n_j y_j$, $y_j \in |K| - l$, $n_j \geqq 0$, wobei

$$\sum_j n_j y_j = [\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{n_1 \text{ mal}}, \underbrace{y_2, \ldots, y_2}_{n_2 \text{ mal}}, \ldots, l, l, \ldots]$$

ist (oder schließlich als formale Summen $\sum_j n_j y_j$, $y_j \in |K|$, $n_j \geqq 0$, mit der Relation $l = 0$). Die zweite Auffassung zeigt, *daß* $SP(|K|)$ *das von* $|K| - l$ *erzeugte freie abelsche Monoid mit neutralem Element ist.* Dem Übergang von (8) zu (11) entsprechend folgt aus (9)

$$[a_1, a_2, \ldots](t) = [a_1(t), a_2(t), \ldots], \qquad a_i \in K_q,\ t \in \Delta_q$$

oder in der Summenschreibweise

$$\left(\sum_j n_j b_j\right)(t) = \sum_j n_j \cdot b_j(t), \qquad b_j \in K_q - l_q \text{ (bzw. } b_j \in K_q),\ n_j \geqq 0,\ t \in \Delta_q.$$

Daraus entnimmt man, daß die formale Addition in $SP(|K|)$ gemäß 2.6 durch die Addition in $SP(K) < \bar{\Gamma} K$ induziert wird.

Der Inklusion (7) entspricht (vgl. 2.3 D.)

$$SP(|K|) = |SP(K)| < |\bar{\Gamma} K|.$$

Weil die Additionen in $|SP(K)|$ und $|\bar{\Gamma} K|$ durch dieselbe Formel 2.6 (3) charakterisiert sind, ist diese Inklusion mit den Additionen verträglich, d.h. $SP(|K|)$ *ist Untermonoid der Gruppe* $|\bar{\Gamma} K|$. Jedes $x \in |\bar{\Gamma} K|$ läßt sich in der Form $x = a(t)$, $a \in \bar{\Gamma}_q K$, $t \in \Delta_q$ schreiben. Zu a gibt es $a_+, a_- \in SF_q(K)$ mit

[9]) Zur Definition des direkten Limes von topologischen Räumen s. Fußnote [7]) S. 385.

$a = a_+ - a_-$ (z.B. $a_+ = \sum_{n_j > 0} n_j b_j$, $a_- = \sum_{n_j < 0} (-n_j) b_j$, wenn $a = \sum_j n_j b_j$). Nach 2.6 (3), (5) folgt

$$x = (a_+ - a_-)(t) = a_+(t) - a_-(t).$$

$a_+(t)$ und $a_-(t)$ liegen aber in $|SP(K)| = SP(|K|)$, *also wird die Gruppe* $|\bar{\Gamma}K|$ *von dem Untermonoid* $SP(|K|)$ *erzeugt.*

Ein bekannter Satz der Algebra besagt, daß es zu jedem abelschen Monoid (bis auf Isomorphie) höchstens eine abelsche Gruppe gibt, die das Monoid enthält und von ihm erzeugt wird (vgl. BOURBAKI [1] § 2 No. 4). Weil $SP(|K|)$ das von $|K| - l$ erzeugte freie abelsche Monoid mit neutralem Element ist, folgt: $|\bar{\Gamma}K|$ *ist die von* $|K| - l$ *erzeugte freie abelsche Gruppe.*

Auch der von DOLD und THOM betrachtete Raum $AG(|K|)$ ist algebraisch die von $|K| - l$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Für abzählbares K ist die Topologie von $AG(|K|)$ die Identifizierungstopologie der Abbildung

$$\pi: SP(|K|) \times SP(|K|) \to AG(|K|),$$

die durch $\pi(x, x') = x - x'$, $x, x' \in SP(|K|)$ gegeben ist. (Die Definition der Topologie von $AG(X)$ für beliebiges X lautet etwas anders, vgl. [4].) Um nun $|\bar{\Gamma}K| = AG(|K|)$ zu zeigen, betrachten wir die CSS-Abbildung

$$p: SP(K) \times SP(K) \to \bar{\Gamma}K$$

definiert durch $p(a, a') = a - a'$, $a, a' \in SP_q(K)$. Es ist

$$\begin{aligned} |SP(K) \times SP(K)| &= |SP(K)| \otimes |SP(K)| \quad \text{nach 2.5 Satz 5} \\ &= |SP(K)| \times |SP(K)| \quad \text{nach 2.4 A.} \\ &\quad [K \text{ ist abzählbar, also auch } SP(K)] \\ &= SP(|K|) \times SP(|K|) \quad \text{wegen (11).} \end{aligned}$$

Für die induzierte Abbildung

$$|p|: SP(|K|) \times SP(|K|) \to |\bar{\Gamma}K|$$

gilt nach Definition [2.3 (4)]

$$|p|((a, a')(t)) = (a - a')(t), \qquad a, a' \in SP_q(K),\ t \in \Delta_q.$$

Nach 2.5 (2) ist $(a, a')(t) = (a(t), a'(t))$ und nach 2.6 (3), (5) $(a - a')(t) = a(t) - a'(t)$, also gilt

$$|p|(a(t), a'(t)) = a(t) - a'(t).$$

Da sich jedes Paar $x, x' \in SP(|K|)$ in der Form $a(t), a'(t)$ schreiben läßt, folgt $|p|(x, x') = x - x'$ für alle $x, x' \in SP(|K|)$, d.h. $|p| = \pi$ [wenn man die isomorphen Gruppen $|\bar{\Gamma}K|$ und $AG(|K|)$ als gleich betrachtet]. Weil p eine CSS-Abbildung auf $SP(K)$ ist, ist $|p|$ nach 2.3 E. eine Identifizierungsabbildung. Also tragen sowohl $|\bar{\Gamma}K|$ als auch $AG(|K|)$ die Identifizierungs-

topologie bezüglich $|p| = \pi$. Folglich gilt für jeden abzählbaren CSS-Komplex K

$$|\bar{\Gamma} K| = AG(|K|). \tag{12}$$

Für jeden topologischen Raum X (mit Grundpunkt) ist

$$X = SP^1(X) < SP(X) < AG(X), \tag{13}$$

entsprechend für jeden CSS-Komplex K (mit Grundpunkt)

$$K = SP^1(K) < SP(K) < \bar{\Gamma} K. \tag{14}$$

Die CSS-Abbildung $f: K \to \Gamma K/\Gamma L$ von 2.9 (S. 398) ist im vorliegenden Fall $L = \{l_q\}$ die natürliche Injektion (14). Demnach ist $|f|$ die natürliche Injektion $|K| < |\bar{\Gamma} K|$ (vgl. 2.3 D.), die für abzählbares K auch durch $|K| < AG(|K|)$ ersetzt werden kann [vgl. (12), (13)]. Aus Satz 9 ergibt sich nun als Spezialfall:

Satz 10. *K sei ein abzählbarer CSS-Komplex mit Grundpunkt, l sei der zugehörige Grundpunkt der geometrischen Realisierung $|K|$. Dann ist die Zusammensetzung*

$$H_q(|K|, l) \longrightarrow H_q(AG(|K|), 0) \xrightarrow{g_*} \pi_q(AG(|K|), 0)$$

des durch die Injektion $|K| < AG(|K|)$ induzierten Homomorphismus' mit dem natürlichen Homomorphismus g_* von 1.7 ein Isomorphismus für alle q.

Ein Vorteil dieser Formulierung gegenüber Satz 9 ist, daß $AG(|K|)$ und die benutzten Homomorphismen schon ihrer Definition nach nur von dem topologischen Raum $|K|$ und seinem Grundpunkt l abhängen, nicht aber von dem CSS-Komplex K. Das ist für $|\bar{\Gamma} K|$ und $|f|$ in Satz 9 nicht so klar.

Bemerkung 1. Daß wir in diesem Abschnitt immer nur CSS-Komplexe bzw. Räume mit Grundpunkt und nicht beliebige Paare von CSS-Komplexen bzw. Räumen betrachtet haben, ist keine wesentliche Einschränkung. Ist nämlich $L < K$ ein beliebiges Paar von CSS-Komplexen mit nicht leerem L, so identifiziere man in K_q alle Elemente von L_q zu einem einzigen l_q. $\bar{K}_q$ sei die aus K_q entstehende Menge. Die CSS-Struktur von K induziert eine CSS-Struktur in $\bar{K} = \bigcup_q \bar{K}_q$, die $\bar{K}$ zu einem CSS-Komplex mit Grundpunkt macht [$l_q = (s_0)^q l_0$ ist das ausgezeichnete Element von $\bar{K}_q$]. Offenbar ist $\Gamma K/\Gamma L \cong \bar{\Gamma} \bar{K} = \Gamma \bar{K}/\Gamma \bar{L}$ mit $\bar{L} = \{l_q\}$, also (vgl. 1.4 und 2.7 Satz 7)

$$H_q(|K|, |L|) \cong H_q(K, L) \cong H_q(\bar{K}, \bar{L}) \cong H_q(|\bar{K}|, l)$$

mit $l = |\bar{L}|$. Andererseits sieht man leicht, daß man eine geometrische Realisierung $|\bar{K}|$ von $\bar{K}$ erhält, wenn man $|L|$ in $|K|$ zu einem Punkt identifiziert, und dieser Punkt ist dann gerade $|\bar{L}| = l$; wir schreiben dafür $|\bar{K}| = |K|/|L|$. Folglich erhält man aus der Isomorphie $H_q(|\bar{K}|, l) \cong \pi_q(AG(|\bar{K}|), 0)$ von Satz 10 auch eine Isomorphie

$$H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(AG(|K|/|L|), 0).$$

Bemerkung 2. Auch für überabzählbares K ist $|SP(K)|$ als Monoid mit $SP(|K|)$ isomorph und $|\bar{\Gamma}K|$ als Gruppe mit $AG(|K|)$. Die Topologien werden im allgemeinen nicht gleich sein, da schon $|(K)^n|$ und $|K|^n$ verschiedene Topologien haben können. Aber die kompakten Teilmengen von $|(K)^n|$ sind dieselben wie die von $|K|^n$ und tragen die gleiche Topologie (vgl. 2.5 Folgerung A und 2.4 B.). Wie man leicht bestätigt, überträgt sich das auf die n-fachen symmetrischen Produkte $|SP^n(K)|$ und $SP^n(|K|)$ und von daher auf die unendlichen symmetrischen Produkte $|SP(K)|$ und $SP(|K|)$ [jede kompakte Teilmenge dieser Räume liegt schon in $|SP^n(K)|$ bzw. $SP^n(|K|)$ für genügend großes n]. Daraus folgt $\pi_q(|SP(K)|, 0) \cong \pi_q(SP(|K|), 0)$, da Sphärenabbildungen und ihre Homotopien kompakte Bilder haben. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn DOLD haben auch $|\bar{\Gamma}K|$ und $AG(|K|)$ die gleichen kompakten Teilmengen — der Beweis ist jedoch weniger direkt als der für die symmetrischen Produkte —, und es folgt $\pi_q(|\bar{\Gamma}K), 0) \cong \pi_q(AG(|K|), 0)$. Daher ließe sich die Dold-Thomsche Isomorphie $H_q(|K|, l) \cong \pi_q(AG(|K|), 0)$ auch für überabzählbares K aus (3) (S. 400) bzw. 2.9 Satz 9 gewinnen.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Algèbre, Chap. I, 2. Aufl. Paris 1951. — [2] CARTAN, H.: Séminaire de Topologie algébrique. Paris 1948/49. — [3] DOLD, A., et R. THOM: Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinie. C. R. Acad. Sci. Paris **242**, 1680—1682 (1956). — [4] DOLD, A., and R. THOM: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. Erscheint demnächst in Ann. of Math. — [5] EILENBERG, S., and S. MACLANE: On the groups $H(\pi, n)$ I. Ann. of Math. **58**, 55—106 (1953). — [6] EILENBERG, S., and N. E. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press 1952. — [7] EILENBERG, S., and J. A. ZILBER: Semi-simplicial complexes and singular homology. Ann. of Math. **51**, 499—513 (1950). — [8] EILENBERG, S., and J. A. ZILBER: On products of complexes. Amer. Journ. of Math. **75**, 200—204 (1953). — [9] KAN, D. M.: Abstract homotopy. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. I: **41**, 1092—1096 (1955); II: **42**, 255—258 (1956); III: **42**, 419—421 (1956); IV: **42**, 542—544 (1956). — [10] MILNOR, J.: Construction of universal bundles I. Ann. of Math. **63**, 272—284 (1956). — [11] MOORE, J. C.: Homotopie des complexes monoidaux I, II. Seminaire H. CARTAN 7, Exp. 18, 19 (1954/55). — [12] STEENROD, N. E.: On the topology of fibre-bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [13] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. März 1957)

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. Collatz** und **F. Lösch.**

Im Juli 1957 erschien:

3. Heft: **Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik**

Von Dr. **Karl-Richard Dorfner,** München. Mit 44 Abbildungen. VII, 150 Seiten Gr.-8°. 1957. Steif geheftet DM 26,—

Inhaltsübersicht: Einleitung. **I. Physikalische und mathematische Grundlagen.** Grundgleichungen. Linearisierung. Analysis unstetiger Funktionen. — **II. Allgemeine Strömungsfelder.** Lösungsprinzip und Darstellungsformeln. Dickenproblem bei gegebener Geometrie und Auftriebsproblem bei gegebener Druckverteilung des Tragflügels. Auftriebsproblem bei gegebener Geometrie und Dickenproblem bei gegebener Druckverteilung des Tragflügels. — **III. Strömungsfelder mit konischer Symmetrie.** Grundlegende Beziehungen. Dreieckstragflügel mit konstantem Anstellwinkel. Dreieckstragflügel mit nichtkonstantem Anstellwinkel. Überlagerung konischer Strömungsfelder. — **IV. Homogene Strömung.** Verallgemeinerung der Formeln für konische Strömungsfelder. Die Behandlung homogener Strömungsfelder mit Unterschallkanten nach dem Singularitätenverfahren. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

Im Mai 1957 erschien:

4. Heft: **Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen**

Von Dr. **W. Franz,** apl. Professor der theoretischen Physik an der Universität Münster i. Westf. Mit 29 Abbildungen. IV, 123 Seiten Gr.-8°. 1957.
Steif geheftet DM 21,60

Inhaltsübersicht: **I. Allgemeine Grundlagen.** Maxwellsche Gleichungen — Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen. Schwingungsgleichungen, Greensche Dyaden. Elektrischer und magnetischer Dipol. Greensche Dyaden und Greensche Funktion des unendlichen homogenen Raumes. Randwertaufgabe der Beugungstheorie. Stückweise homogenes Material, Grenzbedingungen. Kantenbedingung. Zylinderprobleme. Debyesche Potentiale. Integralgleichungen der Beugungstheorie. — **II. Beugung an Objekten ohne Kanten.** Beugung am Kreiszylinder. Konvergenz der Zylinderfunktionsreihen. Transformation der Reihen nach Watson. Diskussion der Residuenwellen. Diskussion der geometrischen Welle. Watson-Transformation für transparentes Material. Greensche Dyade der Kugel. Verhalten der Legendreschen Kugelfunktionen bei komplexem Index. Watsonsche Transformation der Greenschen Dyade der Kugel. Asymptotische Formeln für die Beugung an idealleitenden Kugeln. Integralgleichung für die Beugung am schwachgekrümmten Objekt. — **III. Beugung an Objekten mit Kanten.** Beugung am Keil nach Sommerfeld. Beugung an der blanken Halbebene nach Sommerfeld. Beugung an der schwarzen Kante. Kirchhoffsche Beugungstheorie. Modifikationen der Kirchhoffschen Theorie. Babinetsches Prinzip. Integralgleichung für die Beugung an der idealleitenden Scheibe. Beugung am schmalen Spalt. Kirchhoffsche Formeln für den ebenen Schirm. Beugung am ebenen Schirm nach der Braunbekschen Methode. Beugung an der idealleitenden Kreisscheibe nach der Methode von Braunbek. — Literatur. — Namen- und Sachverzeichnis.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der angewandten Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Archive for Rational Mechanics and Analysis

Edited by

C. Truesdell

The *Archive for Rational Mechanics and Analysis* appears in numbers struck off as the material reaches the press; five numbers constitute a volume.

The *Archive for Rational Mechanics and Analysis* nourishes the discipline of mechanics as a deductive, mathematical science in the classical tradition and promotes pure analysis, particularly in contexts of application. Its purpose is to give rapid and full publication to researches of exceptional moment, depth, and permanence.

English, French, German, Italian, and Latin are the languages of the Archive.

Subscriptions may be entered through any agent. The price is DM 96.— per volume.

Das *Archive for Rational Mechanics and Analysis* erscheint zwanglos in Einzelheften; fünf Hefte bilden einen Band.

Das *Archive for Rational Mechanics and Analysis* pflegt die Mechanik als eine deduktive mathematische Wissenschaft im klassischen Sinne und fördert die reine Analysis besonders im Hinblick auf ihre Anwendung. Es soll schnell und eingehend über wesentliche Forschungsergebnisse von bleibendem Wert berichten.

Die Arbeiten erscheinen in englischer, französischer, deutscher, italienischer oder lateinischer Sprache.

Bestellungen können in jeder Buchhandlung aufgegeben werden. Preis des Bandes DM 96.—

Titles of papers in the first number:
Das erste Heft enthält folgende Beiträge:

The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory. Part I. By Professor A. E. Green, King's College, Newcastle-upon-Tyne (Great Britain), and Professor R. S. Rivlin, Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence/Rhode Island (USA). — The isothermal Expansion of a Gas Cloud into a Non-uniform Atmosphere. By Dr. M. H. Rogers, University of Illinois Observatory, Urbana/Illinois (USA). — The Pi Theorem of Dimensional Analysis. By Professor L. Brand, Department of Mathematics, Trinity College, Hartford/Connecticut (USA). — Über ein System partieller Differentialgleichungen. Von Professor Dr. E. Kreyszig, Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus/Ohio (USA). — Inductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat. Par Dr. Pham Mau Quan, Paris (France). — Erzwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten. Von Dr. H. Oser, Mathematisches Institut der Universität Freiburg i. Br.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG. Würzburg
Printed in Germany